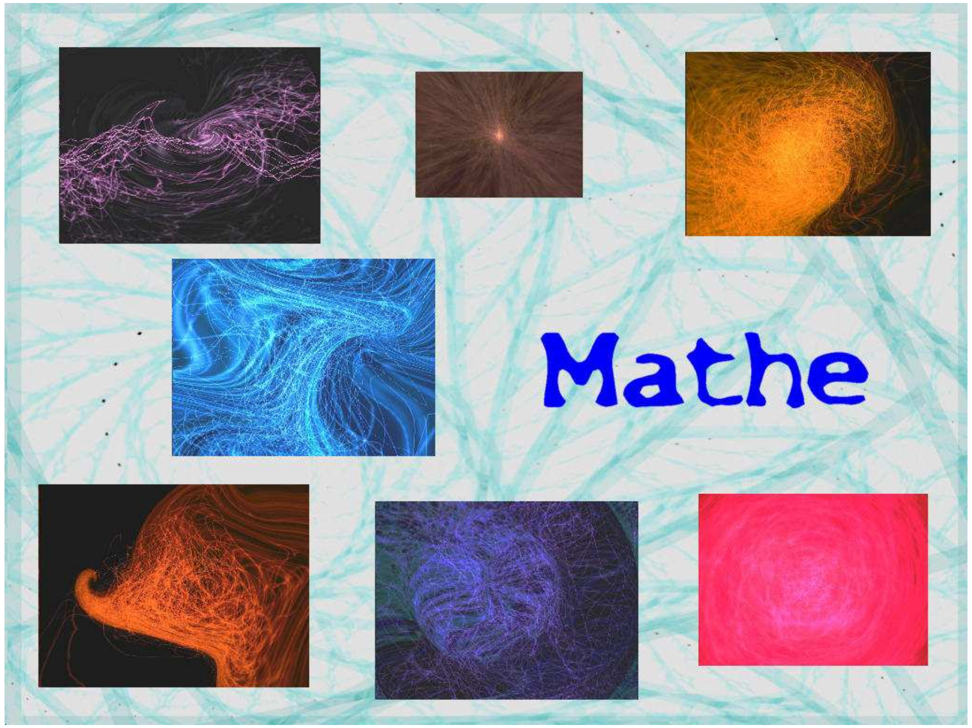


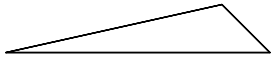
DANIEL ARNOLD

1 Goniometrie

1.1 sin(α+β)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}$$



$$\begin{array}{c}\sin\alpha\\\hline\sin\beta\\\hline\sin\gamma\end{array}=\begin{array}{c}a\\\hline b\\\hline c\end{array}$$

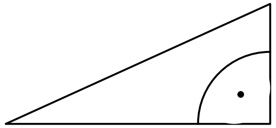
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

1.2 sin(α)

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$
$$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\cot(2\alpha)=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

$$\sin\alpha=2\sin\alpha/2\cos\alpha/2$$
$$\cos\alpha=\cos^2\alpha/2-\sin^2\alpha/2$$
$$\cos\alpha=2\cos^2\alpha/2-1$$
$$\cos\alpha=1-2\sin^2\alpha/2$$
$$\tan\alpha=\frac{2\tan\alpha/2}{1-\tan^2\alpha/2}$$
$$\cot\alpha=\frac{\cot^2\alpha/2-1}{2\cot\alpha/2}$$

$$\sin(\alpha/2)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos(\alpha/2)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan(\alpha/2)=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$\cot(\alpha/2)=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$



$$\sin\alpha=GK/H$$
$$\cos\alpha=AK/H$$
$$\tan\alpha=GK/AK=\sin\alpha/\cos\alpha$$
$$\cot\alpha=GK/H=\cos\alpha/\sin\alpha$$

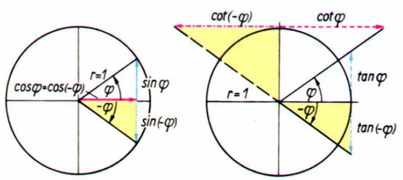
1.3 + -> *

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$
$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$
$$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$
$$\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

1.4 * -> +

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=1/2(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=1/2\cdot(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=1/2\cdot(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=1/2\cdot(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))$$



$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$
$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$$

1.5 α+β << 1°

$$\sin(\alpha+\beta)\approx\sin\alpha+\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)\approx\sin\alpha-\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)\approx\tan\alpha+\tan\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)\approx\tan\alpha-\tan\beta$$
$$\sin(n\alpha)\approx n\sin\alpha$$
$$\tan(n\alpha)\approx n\tan\alpha$$

$$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=1/2$$
$$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\sqrt{3}/2$$
$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\sqrt{2}/2$$
$$\tan 30^\circ=\sqrt{3}/3$$
$$\tan 45^\circ=1$$
$$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

1.6 Hilfswinkel

$$a\cdot\cos x+b\cdot\sin x=c$$
$$\varphi=\arctan b/a$$
$$\cos(x+\varphi)=\frac{c}{a}\cos\varphi$$

2 Mengen

$N:=\{1,2,3...\}$

$N_0:=\{0,1,2...\}$

$Z:=\{...-2,-1,0,1,2...\}$

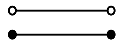
$Q:=\{a/b\mid a\in Z, b\in Z\setminus\{0\}\}$

$R:=Q\wedge\{...\sqrt{2},e,\pi,\sqrt{5}...\}$

$N\subset N_0\subset Z\subset Q\subset R$

$a\notin(a,b)$

$a\in[a,b]$

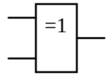


$L\subset D\subset G$

3 Binäre Funktionen

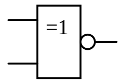
EXOR:

$Y=A\oplus B=A\bar{B}+\bar{A}B=\overline{A\cdot B+\bar{A}\cdot\bar{B}}$



EXNOR:

$Y=\overline{A\oplus B}=A\cdot B+\bar{A}\cdot\bar{B}$



4 Beträge

$$\left|\frac{a\cdot b}{c}\right|=\frac{|a|\cdot|b|}{|c|}$$
$$|a+b|\le|a|+|b|$$

5 Logarithmus

$b = a^x$

$a = \sqrt[x]{b}$

$x = \log_a b$

$\log_a (u \cdot v / w) = \log_a u + \log_a v - \log_a w$

$\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$

$\log_b z = \dfrac{\log z}{\log b}$

$\log_a b \cdot \log_b a = 1$

6 Thermumformung

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

7 Eulersche Symbol

n:																	
0									1								
1								1		1							
2							1		2		1						
3						1		3		3		1					
4					1		4		6		4		1				
5				1		5		10		10		5		1			
6			1		6		15		20		15		6		1		
7		1		7		21		35		35		21		7		1	
8	1		8		28		56		70		56		28		8		1
k:	0		1		2		3		4		5		6		7		8

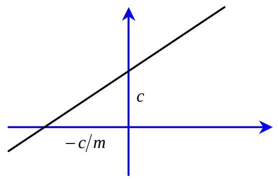
$0! := 1$

$\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

8 Funktionen

8.1 Lineare Gleichung



$y = mx + c$

8.2 Kegelschnitte

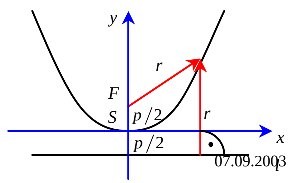
Diskussion der Kegelschnittgleichung $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$			
$AC \neq 0$	$N = D^2/A + E^2/C - F$		
	$N > 0$	$A > 0, C > 0$	Ellipse
		$A < 0, C < 0$	keine reelle Kurve
		$AC < 0$	Hyperbel
	$N = 0$	$AC > 0$	Punkt
		$AC < 0$	Paar sich schneidender Geraden
	$N < 0$	$A > 0, C > 0$	keine reelle Kurve
		$A < 0, C < 0$	Ellipse
		$AC < 0$	Hyperbel
$AC = 0$	$A = 0, C \neq 0$	$D \neq 0$	Parabel
		$D = 0$	Paar paralleler Geraden, die zusammenfallen, wenn $E^2 - FC = 0$
	$A \neq 0, C = 0$	$E \neq 0$	Parabel
		$E = 0$	Paar paralleler Geraden, die zusammenfallen, wenn $D^2 - FA = 0$
	$A = 0, C = 0$	nicht $D = E = 0$	Gerade
		$D = E = 0$	(trivial)

8.2.1 Parabel

$y = \dfrac{1}{2p} x^2$; $S = (0;0)$; $F = (0; \dfrac{p}{2})$; $l = -\dfrac{p}{2}$

8.2.2 Allgemeine Parabelgleichung

$y = \dfrac{1}{2p} x^2 + \dfrac{-x_S}{p} x + \left(\dfrac{x_S^2}{2p} + y_S \right)$; $S = (x_S; y_S)$; $F = (x_S; y_S + p/2)$; $l = y_S - p/2$



8.2.3 Quadratische Gleichung

$$0 = ax^2 + bx + c$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$0 = x^2 + px + q$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2 + \frac{-x_S}{p}x$$

$$y = \quad ax^2 \quad + \quad bx$$

$$x_S = \frac{b}{-2a}$$

9 Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad ; \quad +, \text{wenn rechtssystem}$$

$$[\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$$[x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}] = xyz[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \quad ; \quad x, y, z \in \mathrm{R}$$

10 Lineare Gleichungssysteme

10.1 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten

$$\left| \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{matrix} \right| \rightarrow \left| \begin{matrix} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \end{matrix} \right|$$

$D \neq 0 \rightarrow 1$ Lösung

$D = 0; D_{1,2} = 0 \rightarrow$ Unendlich viele Lösungen

$D = 0; D_{1,2} \neq 0 \rightarrow$ keine Lösung

$$D = \det A = |A| := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$D_1 := \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$D_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$$

$$x_1 = D_1 / D; x_2 = D_2 / D$$

10.2 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\left| \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{matrix} \right| \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

11 Kombinatorik

11.1 Permutationen mit nur unterschiedlichen Elementen

a,b,c abc, acb, bac, bca, cab, cba

$P(n) = V(n,n) = n!$

11.2 Permutationen mit $k_1, k_2, \ldots k_m$ identischen Elementen

a,a,b aab, aba, baa

$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!, k_2!, \ldots, k_m!}$

11.3 Variationen ohne Wiederholung, Reihenfolge wesentlich, Anordnung

$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

11.4 Variationen mit Wiederholung, Reihenfolge wesentlich, Anordnung

$\overline{V}(n,k) = n^k$

11.5 Kombinationen ohne Wiederholung, Reigenfolge unwesentlich, Auswahl

$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

11.6 Kombinationen mit Wiederholung, Reigenfolge unwesentlich, Auswahl

$\overline{C}(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n+k-1-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$

12 Folgen

12.1 Arithmetische Folgen

$n \in N$

$d = a_{n+1} - a_n$

$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) = a_1 + (n-1)d$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

12.2 Geometrische Folgen

$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $n \in N$

$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ $q, a_1 \neq 0$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

13 Differenzieren

13.1 Ableitungen einiger Funktionen

13.1.1 Ableitungen einiger elementarer Funktionen

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

13.1.2 Ableitungen der zyklometrischen Funktionen

$$\frac{d\,\mathrm{Arcsin}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad |x|<1$$

$$\frac{d\,\mathrm{Arccos}\,x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad |x|<1$$

$$\frac{d\,\mathrm{Arctan}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d\,\mathrm{Arccot}\,x}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

13.1.3 Ableitungen der Areafunktionen

$$\frac{d\,\mathrm{arsinh}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d\,\mathrm{Arcosh}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; \quad x>1$$

$$\frac{d\,\mathrm{artanh}\,x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}; \quad |x|<1$$

$$\frac{d\,\mathrm{arcoth}\,x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}; \quad |x|>1$$

13.2 Differentiationsregeln

$$(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3)' = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x)$$

$$(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x))' = f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x) + f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot f_3(x) + \cdot f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3'(x)$$

$$(f^n(x))' = n\cdot (f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

14 Integration

14.1 Tabelle der Grundintegrale

Tabelle der Grundintegrale

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ für } x \text{ beliebig, falls } n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \text{ sowie für } x \neq 0, \text{ falls } n = -2, -3, -4, \ldots$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad \text{für } x \neq 0$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int x^\alpha\,dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C \quad \text{für } x>0, \alpha\in\mathbf{R}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad \text{für } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbf{Z}$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad \text{für } x \neq k\pi;\quad k\in\mathbf{Z}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$\int a^x\,dx = a^x/\ln a + C \quad \text{für } a>0, a\neq 1$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C \quad \text{für } x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\,x + C'$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\,x + C = -\mathrm{Arcos}\,x + C' \quad \text{für } |x|<1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arcsinh}\,x + C = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C'$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \mathrm{Arcosh}\,x + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C' & \text{für } x>1 \\ -\mathrm{Arcosh}\,(-x) + C = -\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right) + C' & \text{für } x<-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \mathrm{artanh}\,x + C = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C' & \text{für } |x|<1 \\ \mathrm{arcoth}\,x + C = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C' & \text{für } |x|>1 \end{cases}$$

14.2 Partielle Integration

$$\int u(x)*v'(x)*dx = u(x)*v(x) + \int u'(x)*v(x)*dx$$

$$\int_{x1}^{x2} u(x)*v'(x)*dx = [u(x)*v(x)]_{x1}^{x2} - \int_{x1}^{x2} u'(x)*v(x)*dx$$

14.3 Integration durch Substitution

$$\int f(g(x))*g'(x)*dx = \int f(u)*du \qquad \text{für u = g(x)}$$

$$\int f(u)*u'*dx = \int f(u)*du \qquad \text{für u = g(x)}$$

$$\int_{x1}^{x2} f(g(x))*g'(x)*dx = \int_{g(x1)}^{g(x2)} f(u)*du \qquad \text{für u = g(x)}$$

14.4 Sektorenformeln

$$A=\frac{1}{2}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} r^2 * d\varphi$$

14.4.1 Leibnizische Sektorenformel

$$A=\frac{1}{2}\int_{t1}^{t2}\left(x\dot{y}-\dot{x}y\right)* dt$$

14.5 Linien- und Kurvenintegrale

14.5.1 Tangentenvektor einer Kurve

$$\dot{\vec{r}}=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\\ \dot{z}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$$

14.5.2 Kurvenintegral eines Vektorfeldes

$$\int_C \vec{F} * d\vec{r}=\int_{t1}^{t2}\left(\vec{F} * \dot{\vec{r}}\right)dt$$

14.6 Bogenlänge

14.6.1 Kartesisch

$$S=\int_{x1}^{x2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{x1}^{x2}\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$$

$$ds=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$$

14.6.2 Parameterdarstellung

$$S=\int_{t1}^{t2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

14.6.3 Polarkoordinaten

$$S=\int_{\varphi 1}^{\varphi 2}\sqrt{r^2+\dot{r}^2}\,d\varphi$$

$$ds=\sqrt{r^2+\dot{r}^2}\,d\varphi$$

15 Komplexe Zahlen C

15.1 Schreibweisen

15.1.1 Normalform

$$z=a+bj$$

15.1.2 Polarform

$$z=r\cdot\left(\cos\varphi+j\sin\varphi\right)=r\cdot cis\,\varphi$$

15.1.3 Exponentialform

$$z=r\cdot e^{j\varphi}$$

15.1.4 Umrechnungen

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$$

$$a=r\cdot\cos\varphi$$

$$b=r\cdot\sin\varphi$$

15.2 Symbolische Methode in der ET

15.2.1 Transformation

$$u=\hat{u}\cdot\sin\left(\omega t+\varphi_u\right)\ ->\ \underline{U}=\hat{u}\cdot e^{j\left(\omega t+\varphi_u\right)}=\underline{u}_0\cdot e^{j\omega t}$$

$$i=\hat{i}\cdot\sin\left(\omega t+\varphi_i\right)\ ->\ \underline{I}=\hat{i}\cdot e^{j\left(\omega t+\varphi_i\right)}=\underline{i}_0\cdot e^{j\omega t}$$

15.2.1.1 Komplexe Amplituden

$$\underline{u}_0=\hat{u}\cdot e^{j\varphi_u}$$

$$\underline{i}_0=\hat{i}\cdot e^{j\varphi_i}$$

15.2.2 Komplexe Widerstände

$$\underline{Z}_R=R$$

$$\underline{Z}_L=j\omega L$$

$$\underline{Z}_C=\frac{1}{j\omega C}$$

15.2.3 Ohmsches Gesetz

$$\underline{U}=\underline{Z}\cdot\underline{I}$$

$$\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=\frac{\hat{u}}{\hat{i}}\cdot e^{j\left(\varphi_u-\varphi_i\right)}$$

15.2.3.1 Für Amplituden

$$\underline{u}_0=\underline{z}\cdot\underline{i}_0$$

15.3 Rechenregeln

15.3.1 Rechnen mit Beträgen

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

15.3.2 Konjugiert-Komplexe Zahlen

$$z = a + bj = r \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) = r \cdot \operatorname{cis}\varphi = r \cdot e^{j\varphi}$$
$$\bar{z} = a - bj = r \cdot (\cos\varphi - j\sin\varphi) = r \cdot \operatorname{cis}(-\varphi) = r \cdot e^{-j\varphi}$$
$$|z| = \operatorname{abs}(z) = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

15.3.3 Die Inverse von z

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a - bj}{a^2 + b^2}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot \operatorname{cis}(-\varphi) = \frac{1}{r} \cdot \mathrm{e}^{-j\varphi}$$

15.3.4 Potenzieren

$$(\operatorname{cis}\varphi)^n = \operatorname{cis}(n\varphi)$$
$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$
$$e^{j\pi} = -1$$
$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$
$$e^{jk\pi} = (-1)^k$$
$$e^{jk2\pi} = 1$$

15.3.5 Multiplikation und Division

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$
$$\operatorname{arc}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{arc}(z_1) + \operatorname{arc}(z_2)$$
$$\operatorname{arc}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{arc}(z_1) - \operatorname{arc}(z_2)$$

15.3.5.1 Multiplikation und Division mit j

$$z \cdot j = r \cdot e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$\frac{z}{j} = r \cdot e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

15.3.6 Wurzeln

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{\mathrm{n}} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j\left(\frac{\varphi}{\mathrm{n}} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} \qquad k = 0,1,2,\ldots(n-1)$$

15.3.6.1 Einheitswurzeln

$$\sqrt[n]{1} = \operatorname{cis}\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = e^{jk\frac{2\pi}{n}} \qquad k = 0,1,\ldots(n-1)$$

15.3.7 Exponentialfunktion

$$z = x + jy$$
$$e^z = e^x \cdot (\cos(y) + j\sin(y))$$
$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$
$$\operatorname{arc}(e^z) = \operatorname{Im} z$$

15.3.7.1 Potenzgesetze

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$
$$(e^z)^n = e^{n \cdot z}$$
$$e^{z + k2\pi j} = e^z \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

15.3.7.2 Spezialfälle

$$e^{j(\varphi + k2\pi)} = e^{j\varphi} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$
$$e^{k2\pi j} = 1 \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

15.3.8 Logarithmen

$$\ln z = \ln r + j\varphi \qquad -\pi < \varphi < \pi$$
$$\ln z = \ln r + j(\varphi + k2\pi) \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

15.3.8.1 Logarithmen negativer Zahlen

$$\ln(-a) = \ln a + j\pi \qquad a \in R^+$$

16 Differentialgleichungen

16.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

16.1.1 Formen

16.1.1.1 implizite Form

$F(x,y,y')=0$

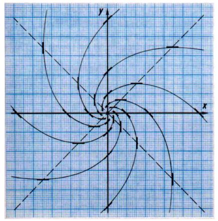
16.1.1.2 explizite Form

$y'=g(x,y)$

16.1.2 Lösungsverfahren für die explizite Form

16.1.2.1 Isoklinenverfahren (graphisch)

$g(x,y)=c$



16.1.2.2 Methode der Variablentrennung

$$y'=g(x)\cdot h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=g(x)\cdot h(y)$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{h(y)}=g(x)\cdot dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{h(y)}\cdot dy=\int g(x)\cdot dx$$
$$\Rightarrow y=f(x)$$

16.2 lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

16.2.1 homogene Dgl mit konstanten Koeffizienten

$a_1\cdot y'+a_0\cdot y=0$

16.2.1.1 Lösung durch charakteristische Gleichung

$$y=C\cdot e^{k\cdot x}$$
$$\Rightarrow a_1\cdot k+a_0=0$$
$$\Rightarrow y=C\cdot e^{-\frac{a_0}{a_1}\cdot x}$$

16.2.2 homogene Dgl

$y'+g(x)\cdot y=0$

16.2.2.1 Lösungsverfahren

Siehe Isoklinenverfahren oder Trennen der Variablen

16.2.3 inhomogene Dgl

16.2.3.1 Allgemeine Form

$g_1(x)\cdot y'+g_0(x)\cdot y=s_0(x)$

16.2.3.2 Normalform

$y'+g(x)\cdot y=s(x)$

16.2.3.3 Lösung durch Zusammensetzen

$y=y_h+y_p$

16.2.4 finden einer partikulären Lösung (bei konstanten Koeffizitenten)

$$y_p=a\cdot s(x)+b\cdot s'(x)+c\cdot s''(x)+\ldots$$
$$\Rightarrow \textit{einsetzen}$$
$$\Rightarrow \textit{Koeffizientenvergleich}$$

16.2.5 Variation der Konstanten

16.2.5.1 homogene Dgl

$$y'+g(x)\cdot y=0$$
$$\Rightarrow y_h=K\cdot e^{-\int g(x)dx}$$

16.2.5.2 inhomogene Dgl

$$y'+g(x)\cdot y=s(x)$$
$$\Rightarrow y=K(x)\cdot e^{-\int g(x)dx}$$
$$K'(x)\cdot e^{-\int g(x)dx}=s(x)$$

16.2.6 Durch Substitution lösbare Dgl 1. Ordnung

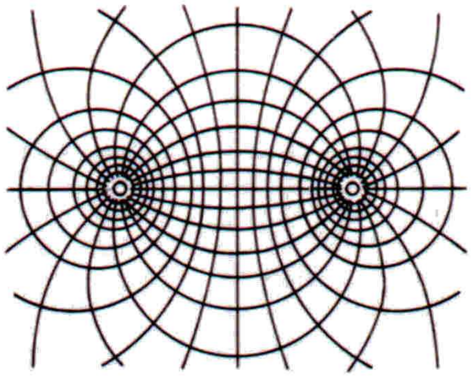
16.2.6.1 1. Typ

$$y'+f\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$u=\frac{y}{x}$$

16.2.6.2 2. Typ

$$y'+f(a\cdot x+b\cdot y+c)$$
$$u=a\cdot x+b\cdot y+c$$

16.3 Orthogonale Trajektorien



16.3.1 Gegebene Kurvenschar

$y = f(x,c)$

16.3.1.1 Dgl dieser Kurvenschar

$y' = g(x,y)$

16.3.2 Gesuchte Kurvenschar

16.3.2.1 Dgl

$$y' = -\frac{1}{g(x,y)}$$

16.4 Exakte Differentialgleichungen

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$$

16.4.1 Definition

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

16.4.2 Integrierende Faktoren

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

16.4.2.1 Fall 1

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x)$$

$$\Phi(x) := \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

$$\ln(\mu) = \int \Phi(x)dx$$

16.4.2.2 Fall 2

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = f(y)$$

$$\Psi(y) := \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$$

$$\ln(\mu) = \int \Psi(y)dy$$

17 Fourier

17.1 Reelle Fourierreihen

17.1.1 Fourier-Reihen mit Periode 2π

17.1.1.1 Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \end{aligned}\right\} k = 1,2,3,....$$

17.1.1.2 Trigonometrische Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + ... + a_n\cos nx + ...$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin 2x + ... + b_n\sin nx + ...$$

17.1.1.3 Trigonometrische Summe

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right]$$

17.1.2 Fourier-Reihen mit Periode T

17.1.2.1 Koeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)dx$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\cos(\omega nx)dx \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\sin(\omega nx)dx \end{aligned}\right\} n = 1,2,3,....$$

17.1.2.2 Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + a_2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}2x\right) + ... + a_n\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + ...$$
$$+ b_1\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + b_2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}2x\right) + ... + b_n\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + ...$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cdot\cos\omega t + a_2\cdot\cos 2\omega t + ... + a_n\cdot\cos n\omega t + ...$$
$$+ b_1\cdot\sin\omega t + b_2\cdot\sin 2\omega t + ... + b_n\cdot\sin n\omega t + ...$$

17.1.3 Spezialfälle

17.1.3.1 Gerade Funktion Periode 2π

$$f(x) = f(-x)$$
$$b_1 = b_2 = ... = b_n = ... = 0$$
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot dx$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

17.1.3.2 Gerade Funktion Periode T

$$f(t) = f(-t)$$
$$b_1 = b_2 = ... = b_n = ... = 0$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cdot dt$$
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$$

17.1.3.3 Ungerade Funktion Periode 2π

$$f(-x) = -f(x)$$
$$a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = ... = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

17.1.3.4 Ungerade Funktion Periode T

$$f(-t) = -f(t)$$
$$a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = ... = 0$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt$$

17.1.4 Darstellung von f als reine Sinusreihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \cdot \sin(n\omega t + \varphi_n)\right]$$
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$
$$\tan\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

17.1.5 Mit TI-89

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \Big\} \; n = -n,....,-2,-1,0,1,2,....,m$$
$$\cos(@n1 * \pi) \to (-1)^{@n1}$$
$$Diamant + STO \to @$$

17.2 Komplexe Darstellung der Fourierreihe

$$e^{-j\cdot n\cdot\pi} = e^{j\cdot n\cdot\pi} = (-1)^n$$

17.2.1 Komplexe Fourierreihe

17.2.1.1 Periode 2π

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j\cdot n\cdot t}$$

17.2.1.2 Periode T

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j\cdot n\cdot\omega\cdot t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j\cdot n\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t}$$

17.2.2 Komplexe und reelle Koeffizienten

17.2.2.1 Komplex aus Reell

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$
$$c_n = \frac{a_n - j\cdot b_n}{2}$$
$$c_{-n} = \frac{a_n + j\cdot b_n}{2}$$

17.2.2.2 Reell aus Komplex

$$a_0 = 2\cdot c_0$$
$$a_n = 2\cdot \mathrm{Re}(c_n)$$
$$b_n = -2\cdot \mathrm{Im}(c_n)$$

17.2.3 Berechnung des komplexen Koeffizienten

17.2.3.1 Periode 2π

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot e^{-j\cdot n\cdot t}\,dt \quad \Big\} \; n = 0,\pm1,\pm2,....$$

17.2.3.2 Periode T

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\cdot e^{-j\cdot n\cdot\omega\cdot t}\,dt \quad \Big\} \; n = 0,\pm1,\pm2,....$$

17.3 Fourierintegral komplex

17.3.1 Gleichungspaar mit Kreisfrequenz ω

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$$
$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega)$$

17.3.1.1 Spektralfunktion

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\, dt$$

17.3.1.2 Fourierintegral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\, d\omega$$

17.3.2 Gleichungspaar mit Frequenz f

17.3.2.1 Spektralfunktion

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\, dt$$

17.3.2.2 Fourierintegral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\, df$$

17.3.3 Spektralfunktion, Spektraldichte oder Frequenzfunktion

17.3.3.1 Spektralfunktion ist komplex

$$F(\omega) = \mathrm{Re}(F(\omega)) + j \cdot \mathrm{Im}(F(\omega))$$
$$F(\omega) = \Re(\omega) + j \cdot \Im(\omega)$$

17.3.3.2 Exponentialform

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{-j\cdot\varphi(\omega)}$$
$$|F(\omega)| = \sqrt{[\Re(\omega)]^2 + [\Im(\omega)]^2}$$
$$\tan(\varphi(\omega)) = \frac{\Im(\omega)}{\Re(\omega)} \Rightarrow \varphi(\omega)$$

17.4 Fourierintegral in der reellen Form

Falls f(t) reellwertig ist

17.4.1 Spektralfunktion und Fourierintegral

$$\mathrm{Re}(F(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)\, dt$$
$$\mathrm{Im}(F(\omega)) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt$$
$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [\mathrm{Re}(F(\omega)) \cdot \cos(\omega \cdot t) - \mathrm{Im}(F(\omega)) \cdot \sin(\omega \cdot t)]\, d\omega$$

17.4.2 Spezialfälle

17.4.2.1 Gerade Funktion

$$\mathrm{Re}(F(\omega)) = \mathrm{Re}(F(-\omega))$$
$$\mathrm{Re}(F(\omega)) = 2 \cdot \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)\, dt$$
$$\mathrm{Im}(F(\omega)) = 0$$
$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}(F(\omega)) \cdot \cos(\omega \cdot t)\, d\omega$$

17.4.2.2 Ungerade Funktion

$$\mathrm{Im}(F(\omega)) = -\mathrm{Im}(F(-\omega))$$
$$\mathrm{Im}(F(\omega)) = -2 \cdot \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt$$
$$\mathrm{Re}(F(\omega)) = 0$$
$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \mathrm{Im}(F(\omega)) \cdot \sin(\omega \cdot t)\, d\omega$$

18 Reihenentwicklung

18.1 Ausgleichsproblem

$$S(a;b;c;\ldots)\sum_{i=1}^{n}\left[P_m(x_i)-y_i\right]^2=\min$$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=0,\frac{\partial S}{\partial b}=0,\frac{\partial S}{\partial c}=0,\ldots$$

18.1.1 Lösungsansätze

18.1.1.1 Lineare Funktion (Gerade)

$$y=a\cdot x+b$$

18.1.1.2 Quadratische Funktion (Parabel)

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

18.1.1.3 Potenzfunktion

$$y=a\cdot x^b$$

18.1.1.4 Exponentialfunktion

$$y=a\cdot e^{b\cdot x}$$

18.2 Interpolationsproblem

18.2.1 Gegebene Kurve

$$P_0=(x_0;y_0),\quad P_1=(x_1;y_1),\quad P_2=(x_2;y_2),\quad \ldots,\quad P_n=(x_n;y_n)$$

18.2.2 Polynom

$$y=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n$$

18.2.3 Interpolationsformel von Lagrange

$$y=y_0\cdot L_0(x)+y_1\cdot L_1(x)+y_2\cdot L_2(x)+\ldots+y_n\cdot L_n(x)$$

18.2.3.1 Lagrangesche Koeffizientenfunktionen

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_2-x_n)}$$

...

$$L_n(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot(x_n-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})}$$

18.3 Schmiegungspolynom

18.3.1 Potenzreihen

$$P(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+\ldots+a_k\cdot x^k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot x^k$$

18.3.2 Konvergenzradius

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

18.3.2.1 Die Reihe konvergiert

$$|x|<r$$

18.3.2.2 Die Reihe divergiert

$$|x|>r$$

18.3.2.3 Unbestimmtes Verhalten

$$|x|=r$$

18.3.3 Maclaurin-Reihe

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3+\ldots$$

18.3.4 Taylor-Reihe

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot h+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot h^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot h^3+\ldots$$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3+\ldots$$

18.4 Unendliche Reihen

18.4.1 Spezielle konvergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}a\cdot q^{n-1}=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\frac{a}{1-q}\qquad(|q|<1)$$

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=e$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots.=\ln 2$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\ldots.=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots=1$$

19 Laplace-Transformation

19.1 Laplace-Transformation

$s \mathrel{\hat{=}} p \mathrel{\hat{=}} \delta + j\omega$

$f(t)\cdot\varepsilon(t) = f(t)$

19.1.1 Zeit zu Bild

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} f(t)\cdot e^{-p\cdot t}\,dt$$

19.1.1.1 Konvergenz

das Integral konvergiert, wenn:

$\lim_{t\to\infty} f(t)\cdot e^{-\delta t} = 0$

19.1.2 Bild zu Zeit

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{\infty} F(s)\cdot e^{p\cdot t}\,dp$$

19.2 Sätze

19.2.1 Linearität

$\mathcal{L}\{\mu\cdot f(t) + \lambda\cdot g(t)\} = \mu\cdot\mathcal{L}\{f(t)\} + \lambda\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}$

19.2.2 Ähnlichkeitssatz

$$f(a\cdot t) \circ\!-\!\bullet \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$$

19.2.3 Verschiebungssatz

19.2.3.1 Verschiebung im Zeitbereich

$f(t) \circ\!-\!\bullet F(p)$

$f^*(t) = f(t-t_0)\cdot\varepsilon(t-t_0)$

$f^*(t) \circ\!-\!\bullet F(p)\cdot e^{-p\cdot t_0}$

19.2.4 Dämpfungssatz = Verschiebung im Bildbereich

Zuerst Dämpfen, dann verschieben!

$f(t)\cdot e^{-at} \circ\!-\!\bullet F(p+a)$

19.2.5 Differentiation

19.2.5.1 Differentiation im Zeitbereich

$f'(t) \circ\!-\!\bullet p\cdot F(s) - f(+0)$

$f''(t) \circ\!-\!\bullet p^2\cdot F(s) - p\cdot f(+0) - f'(+0)$

$f^{(n)}(t) \circ\!-\!\bullet p^n\cdot F(s) - p^{n-1}\cdot f(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0)$

19.2.6 Integration

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau \circ\!-\!\bullet \frac{1}{p}\cdot F(p)$$

$$g(t) = \int f(\tau)\,d\tau \circ\!-\!\bullet \frac{1}{p}\cdot F(p) + \frac{1}{p}\cdot F(0)$$

19.2.7 Faltung

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\,d\tau \circ\!-\!\bullet F_1(p)\cdot F_2(p)$$

$$f(t) * \varepsilon(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

19.2.8 Diracstoss und Laplace

$$\int_a^b f(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

$\delta(t) \circ\!-\!\bullet 1$

$\delta(t-t_0) \circ\!-\!\bullet e^{-p\cdot t_0}$

$f(t-t_0) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)\cdot\varepsilon(t-t_0)$

$f(t) * \delta(t) = f(t)$

19.3 Derivierte Ableitung

$D\,\varepsilon(t) = D\,\sigma(t) := \delta(t)$

$D\,f(t) := f'(t)$

19.3.1 Verallgemeinerte Ableitungsregel

$D\,f(t) \circ\!-\!\bullet F(p) - f(-0)$

19.4 Wichtige Transformationen

$\delta(t) \circ\!-\!\bullet 1$

$\delta(t-t_0) \circ\!-\!\bullet e^{-p\cdot t_0}$

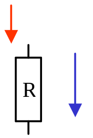
$\varepsilon(t) \circ\!-\!\bullet \frac{1}{p}$

$\varepsilon(t-t_0) \circ\!-\!\bullet \frac{1}{p}\cdot e^{-p\cdot t_0}$

19.5 Ohmsches Gesetz im Bildraum

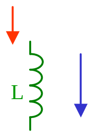
$$U(p)=Z(p)\cdot I(p)$$
$$I(p)=Y(p)\cdot U(p)$$
$$Y(p)=\frac{1}{Z(p)}$$

19.5.1 Widerstand



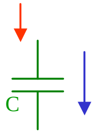
$$U_R(p)=R\cdot I(p)$$
$$Z_R(p)=R$$

19.5.2 Spule



$$U_L(p)=L\cdot p\cdot I(p)$$
$$Z_L(p)=L\cdot p$$

19.5.3 Kondensator



$$U_C(p)=\frac{1}{C\cdot p}\cdot I(p)$$
$$Z_C(p)=\frac{1}{C\cdot p}$$

19.6 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion

$$F(p)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-T\cdot p}}\int_0^T f(t)\cdot e^{-p\cdot t}\,dt$$

19.7 Grenzwertsätze

19.7.1 Anfangswertsatz

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{p\to\infty} p\cdot F(p)$$

19.7.2 Endwertsatz

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} p\cdot F(p)$$

19.8 Sätze für Bildfunktionen

19.8.1 Differentiationssatz

$$-t\cdot f(t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{dF(p)}{dp}$$
$$(-t)^n\cdot f(t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{d^nF(p)}{dp^n}$$

19.8.2 Integrationssatz

$$\frac{f(t)}{t}\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \int_{u=p}^{\infty} F(u)\,du$$

19.8.2.1 Grenzfall p -> 0

$$\int_{p=0}^{\infty} F(p)\,dp=\int_{t=0}^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

19.9 Übertragungsverhalten von Netzwerken

19.9.1 Übertragungsglied

$$Y(p)=G(p)\cdot U(p)$$

19.9.1.1 Impulsantwort

$$g(t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(p)$$

19.9.1.2 Sprungantwort

$$h(t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ H(p)$$

19.9.1.3 Zusammenhang

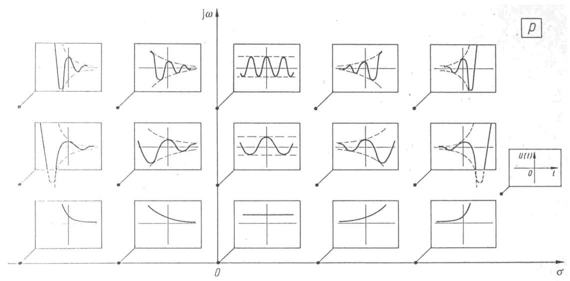
$$g(t)=D\,h(t)$$
$$h(t)=\int_{\tau=0}^{t} g(\tau)\,d\tau$$

19.9.2 Stabilität

$$\lim_{t\to\infty} h(t)<\infty$$
$$\lim_{t\to\infty} g(t)=0$$

Alle Pole in LHE

(und Zählergrad kleiner gleich Nennergrad)



19.10 Frequenzgang

$G(j\omega) := G(p)\big|_{p=j\omega}$

$h(t) = \int_{\tau=0}^{t} g(\tau)\,d\tau$

19.10.1 Sinus auf ein Übertragungsglied

19.10.1.1 Übertragungsglied

$G(j\omega) = G(p)\big|_{p=j\omega}$

19.10.1.2 Eingang

$u(t) = E \cdot \sin(\omega t)$

19.10.1.3 Ausgang nach langer Zeit

$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$A = E \cdot |G(j\omega)|$

$\varphi = arc\ G(j\omega) = \angle G(j\omega)$

20 Z-Transformation

20.1 Definition

20.1.1 Herleitung

20.1.1.1 Wertefolge von Zeitfunktion

$f(t) \ \ -> \ \ f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \delta(t - kT)$

$f(t) \ \ -> \ \ (f_k)$

20.1.1.2 LT von Wertefolge

$f^*(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot e^{-kTp}$

20.1.1.3 Substitution

$e^{Tp} = z$

$\left[F^*(p)\right]_{e^{Tp}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$

20.1.2 Definition

20.1.2.1 Wertefolge

$F_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$

$\mathcal{Z}\{f^*(t)\} = F_z(z)$

$f^*(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ F_z(z)$

20.1.2.2 Zeitfunktion

$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F_z(z)$

$f(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ F_z(z)$

20.2 Rechenregeln

20.2.1 Linearität

$$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; c_1 \cdot F_{1z}(z) + c_2 \cdot F_{2z}(z)$$
$$c_1 \cdot f_{1k} + c_2 \cdot f_{2k} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; c_1 \cdot F_{1z}(z) + c_2 \cdot F_{2z}(z)$$

20.2.2 Verschiebungsregel nach rechts

$$f(t - mT) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; z^{-m} \cdot \left[F_z(z) + \sum_{\nu=1}^{m} f_{-\nu} \cdot z^{\nu} \right]$$
$$f_{k-m} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; z^{-m} \cdot \left[F_z(z) + \sum_{\nu=1}^{m} f_{-\nu} \cdot z^{\nu} \right]$$

20.2.2.1 Falls f(t)=0 für t<0

$$f(t - mT) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; z^{-m} \cdot F_z(z)$$
$$f_{k-m} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; z^{-m} \cdot F_z(z)$$

20.2.3 Verschiebungsregel nach links

$$f(t + mT) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; z^{m} \cdot \left[F_z(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f_{\nu} \cdot z^{-\nu} \right]$$
$$f_{k+m} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; z^{m} \cdot \left[F_z(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f_{\nu} \cdot z^{-\nu} \right]$$

20.2.4 Dämpfungsregel

$$f(t) \cdot e^{\alpha t} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F_z\left(e^{-\alpha T} \cdot z\right)$$
$$\gamma = e^{-\alpha T}$$
$$f_k \cdot \gamma^{-k} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F_z(\gamma \cdot z)$$

20.2.5 Differenzbildungs- und Summationsregel

20.2.5.1 1. Differenzbildungsregel

$$f(t) - f(t - T) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{z-1}{z} \cdot F_z(z) - f_{-1}$$
$$f_k - f_{k-1} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{z-1}{z} \cdot F_z(z) - f_{-1}$$

20.2.5.2 2. Differenzbildungsregel

$$f(t + T) - f(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; (z-1) \cdot F_z(z) - f_0 \cdot z$$
$$f_{k+1} - f_k \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; (z-1) \cdot F_z(z) - f_0 \cdot z$$

20.2.5.3 Summationsregel

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f(t - \nu T) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{z}{z-1} \cdot F_z(z)$$
$$\sum_{\nu=0}^{k} f_{\nu} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{z}{z-1} \cdot F_z(z)$$

20.2.6 Differentiationsregel für die Bildfunktion

$$k \cdot f_k \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; -z \cdot F'_z(z)$$
$$t \cdot f(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; -Tz \cdot F'_z(z)$$

20.2.7 Faltungsregel

20.2.7.1 Faltungsregel für Zeitfunktionen

$$f^*(t) * g^*(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F_z(z) \cdot G_z(z)$$

20.2.7.2 Faltungsregel für Zahlenfolgen

$$f_k * g_k = \sum_{\nu=0}^{k} f_{\nu} \cdot g_{k-\nu}$$
$$(f_k * g_k) = \left(\sum_{\nu=0}^{k} f_{\nu} \cdot g_{k-\nu} \right) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F_z(z) \cdot G_z(z)$$

20.2.7.3 Faltungsregel der Z-Transformation

$$f(t) * g^*(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F_z(z) \cdot G_z(z)$$
$$f^*(t) * g(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F_z(z) \cdot G_z(z)$$

20.2.8 Grenzwertsätze

20.2.8.1 Anfangswertsatz

$$\lim_{z \to \infty} F_z(z) = f_0$$

20.2.8.2 Endwertsatz

$$\lim_{k \to +\infty} f_k = \lim_{z \to 1+0} \left((z-1) \cdot F_z(z) \right)$$

Falls alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen mit Ausnahme eines einfachen Poles in z=1

20.3 Wichtige Z-Transformierte

$$\delta(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; 1$$
$$\delta(t - mT) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; z^{-m}$$
$$\varepsilon(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$
$$e^{\alpha t} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{1 - e^{\alpha T} \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\alpha T}}$$
$$t \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{Tz}{(z-1)^2}$$
$$t^2 \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; T^2 \cdot z \cdot \frac{z+1}{(z-1)^3}$$
$$t^3 \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; T^3 \cdot z \cdot \frac{z^2 + 4z + 1}{(z-1)^4}$$
$$(-1)^k \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{1 + z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$
$$\beta^k \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{z}{z - \beta}$$
$$\left(1, \beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4, \ldots\right) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{z}{z - \beta}$$
$$\beta^{k-1} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{z - \beta}$$
$$\left(0, 1, \beta, \beta^2, \beta^3, \ldots\right) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{z}{z - \beta}$$

20.4 Z-Transformation von Laplace-Transformierten

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$\mathcal{Z}\{F(s)\} = \mathcal{Z}\{f(t)\}$

20.4.1 Z-Transformation rationaler Funktionen von s

20.4.1.1 1. Fall: F(s) hat nur die einfachen Pole $\alpha_1, \dots \alpha_n$

$$F(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{(s-\alpha_1)\dots(s-\alpha_n)} \overset{\substack{TI-89:\\ \text{expand(F(s))}}}{=} \frac{r_1}{s-\alpha_1} + \frac{r_2}{s-\alpha_2} + \dots + \frac{r_n}{s-\alpha_n}$$

$$\mathcal{Z}\{F(s)\} = z \cdot \left(\frac{r_1}{z - e^{\alpha_1 T}} + \frac{r_2}{z - e^{\alpha_2 T}} + \dots + \frac{r_n}{z - e^{\alpha_n T}} \right)$$

20.4.1.2 2. Fall: F(s) hat einen q-fachen Pol α, q=2,3, ...

$$F(s) = \frac{Z(s)}{\prod_{\nu=1}^{n}(s-\alpha_\nu)} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F_z(z) = \frac{z \cdot M(z)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(z - e^{\alpha_\nu \cdot T}\right)}$$

20.4.2 Z-Transformation rationaler Funktionen von e^{Ts}

20.4.2.1 Z-Transformierte von einer rationalen Funktion von e^{Ts}

$\mathcal{Z}\{R(e^{-Ts})\} = R(z^{-1})$

$\mathcal{Z}\{R(e^{Ts})\} = R(z)$

20.4.3 Lösung von Differenzengleichungen

20.4.3.1 Differenzengleichung für Zeitfunktionen

$$a_n \cdot y(t-nT) + \dots + a_1 \cdot y(t-T) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot u(t-T) + \dots + b_m \cdot u(t-mT)$$

$u(t) = 0 \quad t < 0$

$y(t) = 0 \quad t < 0$

$Y(s) = G(s) \cdot Z(s)$

20.4.3.2 Differenzengleichung für Zahlenfolgen

$$a_n \cdot y_{k-n} + \dots + a_1 \cdot y_{k-1} + a_0 \cdot y_k = b_0 \cdot u_k + b_1 \cdot u_{k-1} + \dots + b_m \cdot u_{k-m}$$

$u(t) = 0 \quad t < 0$

$y(t) = 0 \quad t < 0$

$Y_z(z) = G_z(z) \cdot Z_z(z)$

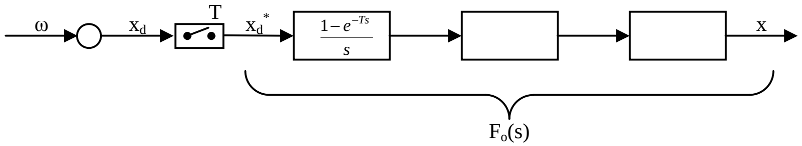
$$G_z(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_m \cdot z^{-m}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_n \cdot z^{-n}}$$

20.4.4 Z-Transformation des Produktes von $R_1(e^{Ts})$ und $R_2(s)$

$\mathcal{Z}\{R_1(s) \cdot R_2(e^{-Ts})\} = \mathcal{Z}\{R_1(s)\} \cdot R_2(z^{-1})$

20.5 Regelkreis

20.5.1 offener Regelkreis



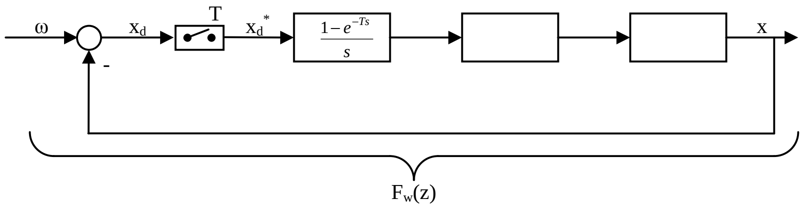
20.5.1.1 s-Übertragungsgleichung

$X(s) = X_d^*(s) \cdot F_o(s)$

20.5.1.2 z-Übertragungsgleichung

$X_z = F_{oz} \cdot X_{dz}$

20.5.2 geschlossener Regelkreis



20.5.2.1 z-Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

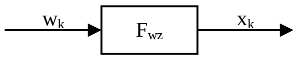
$$F_{wz} = \frac{F_{oz}}{1 + F_{oz}}$$

20.5.2.2 z-Übertragungsgleichung

$X(z) = F_w(z) \cdot W(z)$

$$X_z = \frac{F_{oz}}{1 + F_{oz}} \cdot W_z$$

20.5.3 Rekursive Berechnung der Ausgangswerte x_k (ohne Rücktransformation von X_z)



20.5.3.1 Sobald F_w bekannt

$$\frac{X_z}{W_z} = F_{wz}$$

$$\frac{X_z}{W_z} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \ldots + a_n \cdot z^{-n}}{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \ldots + b_m \cdot z^{-m}} = \frac{A_n(z)}{B_m(z)}$$

$$X_z \cdot \left(a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \ldots + a_n \cdot z^{-n}\right) = W_z \cdot \left(b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \ldots + b_m \cdot z^{-m}\right)$$

$$a_0 \cdot X_z + a_1 \cdot z^{-1} \cdot X_z + a_2 \cdot z^{-2} \cdot X_z + \ldots + a_n \cdot z^{-n} \cdot X_z = b_0 \cdot W_z + b_1 \cdot z^{-1} \cdot W_z + b_2 \cdot z^{-2} \cdot W_z + \ldots + b_m \cdot z^{-m} \cdot W_z$$

20.5.3.2 Rücktransformation

$$a_0 \cdot x_k + a_1 \cdot x_{k-1} + a_2 \cdot x_{k-2} + \ldots + a_n \cdot x_{k-n} = b_0 \cdot w_k + b_1 \cdot w_{k-1} + b_2 \cdot w_{k-2} + \ldots + b_m \cdot w_{k-3}$$

$$x_k = \frac{\left(b_0 \cdot w_k + b_1 \cdot w_{k-1} + b_2 \cdot w_{k-2} + \ldots + b_m \cdot w_{k-3}\right) - \left(a_1 \cdot x_{k-1} + a_2 \cdot x_{k-2} + \ldots + a_n \cdot x_{k-n}\right)}{a_0}$$

20.5.4 Stabilität

20.5.4.1 Regelkreis ist stabil, wenn:

$$\lim_{x \to \infty} x_k = endlich$$

$$\left|\lim_{x \to \infty} x_k\right| < \infty$$

20.6 Rücktransformation

$$(f_k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F_z(z)\}$$

$$f^*(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{F_z(z)\}$$

20.6.1 Zeitfunktion aus Wertefolge

$$f_k = \varphi(k)$$

$$f(t) = \varphi\left(\frac{t}{T}\right)$$

20.6.2 Wichtige Zeittransformierte

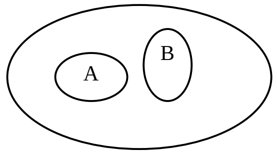
$$\frac{z}{z-\beta} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \beta^k = e^{k \cdot \ln \beta}$$

21 Warscheinlichkeitsrechnung

21.1 Wahrscheinlichkeit

21.1.1 Begriffe

21.1.1.1 Unvereinbar



$$A \cap B = \Phi$$

21.1.2 Axiome

$$E \in \varepsilon$$

$$\varepsilon \overset{P}{\rightarrow} \Phi$$

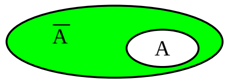
$$P(E) \geq 0$$

$$P(S) = 1$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) \qquad \text{wenn } E \cap F = \Phi$$

21.1.3 Folgerungen

21.1.3.1 Die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses

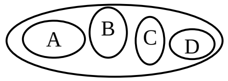


$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

21.1.3.2 Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses

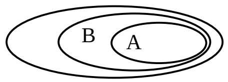
$$P(\Phi) = 0$$

21.1.3.3 Die Wahrscheinlichkeit mehrer unvereinbarer Ereignisse



$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$

21.1.3.4 Die Wahrscheinlichkeit von A, wenn $A \subset B$



$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

21.1.3.5 Grenzen für die Wahrscheinlichkeit

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

21.1.3.6 Additionssatz für zwei beliebige Ereignisse

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

21.1.3.7 Gleichwahrscheinliche Ereignisse (klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff)

$$P(E) = \frac{g}{m} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$$

21.1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

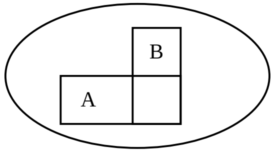
21.1.4.1 Allgemeine Definition

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

21.1.4.2 Der Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \qquad P(B) \neq 0$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \qquad P(A) \neq 0$$

21.1.4.3 Unabhängig



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$\Rightarrow P(A|B) = P(A)$$
$$\Rightarrow P(B|A) = P(B)$$

21.1.4.4 Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

$$P(E_1 \cap E_2 ... \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) ... \cdot P(E_n)$$

21.1.4.5 Formel von Sylvester

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$

21.1.5 Geometrische Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \frac{\text{Masszahl für die günstigen Fälle}}{\text{Masszahl für die möglichen Fälle}}$$

21.2 Verteilungen

21.2.1 Binomische Verteilung (Urnenmodell, Ziehen mit Zurücklegen)

21.2.1.1 Newtonsche Formel

$$P_n(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

21.2.2 Hypergeometrische Verteilung (Urnenmodell, Ziehen ohne Zurücklegen)

$$P_n^*(x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{m-r}{n-x}}{\binom{m}{n}}$$

21.2.2.1 Approximation durch die binomische Verteilung

$\frac{n}{m} < 0.1$ und $m \geq 60$

21.2.3 Die Poisson Verteilung

$$P(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$
$$\lambda = n \cdot p$$

Näherung für die Newtonsche Formel, wenn p klein (=seltenes Ereignis) und n gross.

21.3 Zufallsvariable

21.3.1 Erwartungswert

$$\mu := \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$$

21.3.2 Varianz

$$\sigma^2 := \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - \mu)^2$$

21.3.3 Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

21.3.4 Spezialfälle

21.3.4.1 Zufallsvariable binomisch verteilt

$$\mu = n \cdot p$$
$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

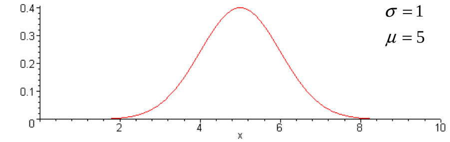
21.3.4.2 Zufallsvariable Poisson-verteilt

$$\mu = \lambda$$
$$\sigma^2 = \lambda$$

21.4 Normalverteilung

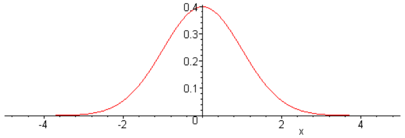
21.4.1 Gausssche Glockenkurve

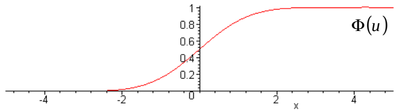
$$y = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



21.4.2 Standardisierung der Zufallsvariablen

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma}$$
$$P(a \le x \le b) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$$
$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$
$$u_1 = \frac{a-\mu}{\sigma}$$
$$u_2 = \frac{b-\mu}{\sigma}$$





21.4.3 Die binomisch verteilte Zufallsvaria

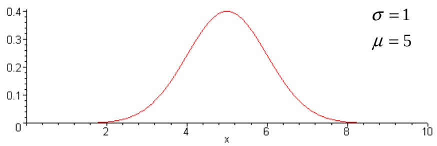
$$\mu = np$$
$$\sigma = \sqrt{npq}$$
$$npq > 9$$
$$P(a \le x \le b) = \sum_{a \le x \le b} P_n(x) \approx \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$$
$$u_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}$$
$$u_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$$

21.4.4 Der zentrale Grenzwertsatz

$\frac{2}{3}$ der Werte liegt in $\mu \pm \sigma$

95% der Werte liegt in $\mu \pm 2\sigma$

fast alle Werte liegt in $\mu \pm 3\sigma$



Erstellt von:
Daniel Arnold, Altdorf, Uri, Schweiz
http://www.lanny.ch

Erstelldatum 29.11.1999 18:20

Letzte Änderung 28.11.2004 17:50