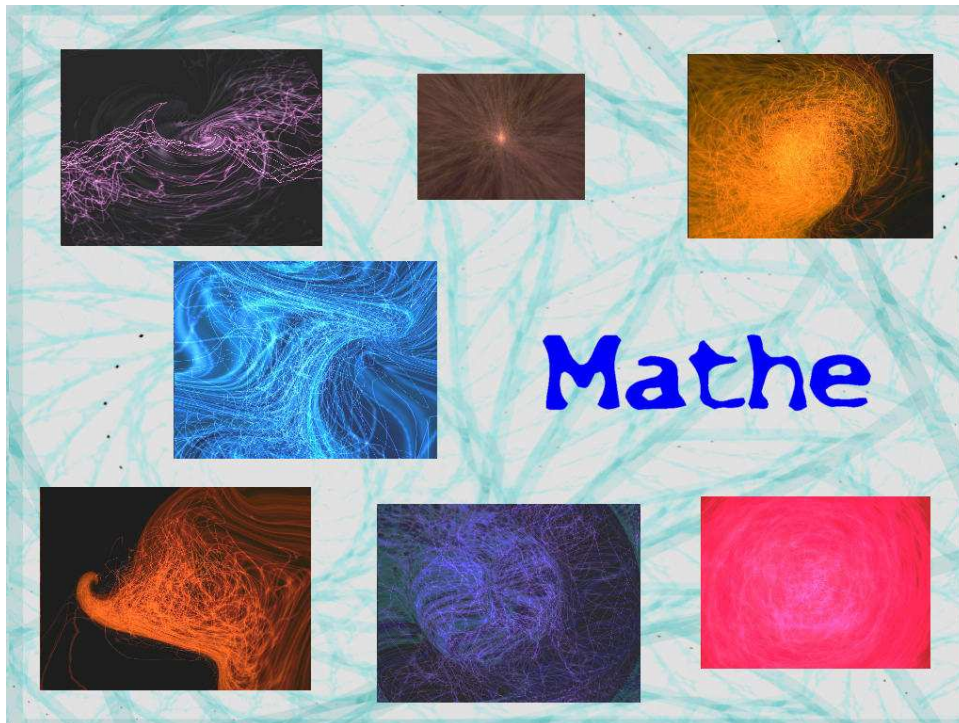


<b>1</b>	<b>GONIOMETRIE</b> .....	<b>7</b>
1.1	SIN( $\alpha+\beta$ ) .....	7
1.2	SIN( $\alpha$ ).....	7
1.3	+ -> * .....	7
1.4	* -> + .....	7
1.5	$\alpha+\beta \ll 1^\circ$ .....	7
1.6	HILFSWINKEL .....	7
<b>2</b>	<b>MENGEN</b> .....	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>BINÄRE FUNKTIONEN</b> .....	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>BETRÄGE</b> .....	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>LOGARITHMUS</b> .....	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>THERMUMFORMUNG</b> .....	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>EULERSCHE SYMBOL</b> .....	<b>9</b>
<b>8</b>	<b>FUNKTIONEN</b> .....	<b>10</b>
8.1	LINEARE GLEICHUNG .....	10
8.2	KEGELSCHNITTE.....	10
8.2.1	Parabel.....	10
8.2.2	Allgemeine Parabelgleichung .....	10
8.2.3	Quadratische Gleichung .....	11
<b>9</b>	<b>VEKTOREN</b> .....	<b>12</b>
<b>10</b>	<b>LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME</b> .....	<b>12</b>
10.1	2 GLEICHUNGEN MIT 2 UNBEKANNTEN .....	12
10.2	3 GLEICHUNGEN MIT 3 UNBEKANNTEN .....	12
<b>11</b>	<b>KOMBINATORIK</b> .....	<b>13</b>
11.1	PERMUTATIONEN MIT NUR UNTERSCHIEDLICHEN ELEMENTEN .....	13
11.2	PERMUTATIONEN MIT $K_1, K_2, \dots, K_M$ IDENTISCHEN ELEMENTEN .....	13
11.3	VARIATIONEN OHNE WIEDERHOLUNG, REIHENFOLGE WESENTLICH, ANORDNUNG.....	13
11.4	VARIATIONEN MIT WIEDERHOLUNG, REIHENFOLGE WESENTLICH, ANORDNUNG.....	13
11.5	KOMBINATIONEN OHNE WIEDERHOLUNG, REIHENFOLGE UNWESENTLICH, AUSWAHL .....	13
11.6	KOMBINATIONEN MIT WIEDERHOLUNG, REIHENFOLGE UNWESENTLICH, AUSWAHL .....	13
<b>12</b>	<b>FOLGEN</b> .....	<b>14</b>
12.1	ARITHMETISCHE FOLGEN .....	14
12.2	GEOMETRISCHE FOLGEN .....	14
<b>13</b>	<b>DIFFERENZIEREN</b> .....	<b>15</b>
13.1	ABLEITUNGEN EINIGER FUNKTIONEN .....	15
13.1.1	Ableitungen einiger elementarer Funktionen .....	15
13.1.2	Ableitungen der zyklometrischen Funktionen.....	15
13.1.3	Ableitungen der Areafunktionen.....	15
13.2	DIFFERENTIATIONSREGELN .....	15
<b>14</b>	<b>INTEGRATION</b> .....	<b>16</b>
14.1	TABELLE DER GRUNDINTEGRALE .....	16
14.2	PARTIELLE INTEGRATION .....	16
14.3	INTEGRATION DURCH SUBSTITUTION.....	16
14.4	SEKTORENFORMELN .....	17
14.4.1	Leibnizische Sektorenformel.....	17
14.5	LINIEN- UND KURVENINTEGRALE.....	17
14.5.1	Tangentenvektor einer Kurve.....	17
14.5.2	Kurvenintegral eines Vektorfeldes.....	17
14.6	BOGENLÄNGE .....	17
14.6.1	Kartesisch.....	17
14.6.2	Parameterdarstellung .....	17
14.6.3	Polarkoordinaten .....	17



<b>15</b>	<b>KOMPLEXE ZAHLEN C</b>	<b>18</b>
15.1	SCHREIBWEISEN	18
15.1.1	Normalform	18
15.1.2	Polarform	18
15.1.3	Exponentialform	18
15.1.4	Umrechnungen	18
15.2	SYMBOLISCHE METHODE IN DER ET	18
15.2.1	Transformation	18
15.2.1.1	Komplexe Amplituden	18
15.2.2	Komplexe Widerstände	18
15.2.3	Ohmsches Gesetz	18
15.2.3.1	Für Amplituden	18
15.3	RECHENREGELN	19
15.3.1	Rechnen mit Beträgen	19
15.3.2	Konjugiert-Komplexe Zahlen	19
15.3.3	Die Inverse von $z$	19
15.3.4	Potenzieren	19
15.3.5	Multiplikation und Division	19
15.3.5.1	Multiplikation und Division mit $j$	19
15.3.6	Wurzeln	19
15.3.6.1	Einheitswurzeln	19
15.3.7	Exponentialfunktion	20
15.3.7.1	Potenzgesetze	20
15.3.7.2	Spezialfälle	20
15.3.8	Logarithmen	20
15.3.8.1	Logarithmen negativer Zahlen	20
<b>16</b>	<b>DIFFERENTIALGLEICHUNGEN</b>	<b>21</b>
16.1	DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG	21
16.1.1	Formen	21
16.1.1.1	implizite Form	21
16.1.1.2	explizite Form	21
16.1.2	Lösungsverfahren für die explizite Form	21
16.1.2.1	Isoklinenverfahren (graphisch)	21
16.1.2.2	Methode der Variablentrennung	21
16.2	LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG 1. ORDNUNG	21
16.2.1	homogene Dgl mit konstanten Koeffizienten	21
16.2.1.1	Lösung durch charakteristische Gleichung	21
16.2.2	homogene Dgl	21
16.2.2.1	Lösungsverfahren	21
16.2.3	inhomogene Dgl	22
16.2.3.1	Allgemeine Form	22
16.2.3.2	Normalform	22
16.2.3.3	Lösung durch Zusammensetzen	22
16.2.4	finden einer partikulären Lösung (bei konstanten Koeffizienten)	22
16.2.5	Variation der Konstanten	22
16.2.5.1	homogene Dgl	22
16.2.5.2	inhomogene Dgl	22
16.2.6	Durch Substitution lösbare Dgl 1. Ordnung	22
16.2.6.1	1. Typ	22
16.2.6.2	2. Typ	22
16.3	ORTHOGONALE TRAJEKTORIEN	23
16.3.1	Gegebene Kurvenschar	23
16.3.1.1	Dgl dieser Kurvenschar	23
16.3.2	Gesuchte Kurvenschar	23
16.3.2.1	Dgl	23
16.4	EXAKTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	23
16.4.1	Definition	23
16.4.2	Integrierende Faktoren	23
16.4.2.1	Fall 1	23
16.4.2.2	Fall 2	23
<b>17</b>	<b>FOURIER</b>	<b>24</b>
17.1	REELLE FOURIERREIHEN	24
17.1.1	Fourier-Reihen mit Periode $2\pi$	24
17.1.1.1	Koeffizienten	24
17.1.1.2	Trigonometrische Reihe	24
17.1.1.3	Trigonometrische Summe	24
17.1.2	Fourier-Reihen mit Periode $T$	24
17.1.2.1	Koeffizienten	24
17.1.2.2	Reihe	24
17.1.3	Spezialfälle	25
17.1.3.1	Gerade Funktion Periode $2\pi$	25
17.1.3.2	Gerade Funktion Periode $T$	25
17.1.3.3	Ungerade Funktion Periode $2\pi$	25
17.1.3.4	Ungerade Funktion Periode $T$	25
17.1.4	Darstellung von $f$ als reine Sinusreihe	25
17.1.5	Mit TI-89	25

17.2	KOMPLEXE DARSTELLUNG DER FOURIERREIHE	26
17.2.1	Komplexe Fourierreihe	26
17.2.1.1	Periode $2\pi$	26
17.2.1.2	Periode $T$	26
17.2.2	Komplexe und reelle Koeffizienten	26
17.2.2.1	Komplex aus Reell	26
17.2.2.2	Reell aus Komplex	26
17.2.3	Berechnung des komplexen Koeffizienten	26
17.2.3.1	Periode $2\pi$	26
17.2.3.2	Periode $T$	26
17.3	FOURIERINTEGRAL KOMPLEX	27
17.3.1	Gleichungspaar mit Kreisfrequenz $\omega$	27
17.3.1.1	Spektralfunktion	27
17.3.1.2	Fourierintegral	27
17.3.2	Gleichungspaar mit Frequenz $f$	27
17.3.2.1	Spektralfunktion	27
17.3.2.2	Fourierintegral	27
17.3.3	Spektralfunktion, Spektraldichte oder Frequenzfunktion	27
17.3.3.1	Spektralfunktion ist komplex	27
17.3.3.2	Exponentialform	27
17.4	FOURIERINTEGRAL IN DER REELLEN FORM	28
17.4.1	Spektralfunktion und Fourierintegral	28
17.4.2	Spezialfälle	28
17.4.2.1	Gerade Funktion	28
17.4.2.2	Ungerade Funktion	28
<b>18</b>	<b>REIHENENTWICKLUNG</b>	<b>29</b>
18.1	AUSGLEICHSPROBLEM	29
18.1.1	Lösungsansätze	29
18.1.1.1	Lineare Funktion (Gerade)	29
18.1.1.2	Quadratische Funktion (Parabel)	29
18.1.1.3	Potenzfunktion	29
18.1.1.4	Exponentialfunktion	29
18.2	INTERPOLATIONSPROBLEM	29
18.2.1	Gegebene Kurve	29
18.2.2	Polynom	29
18.2.3	Interpolationsformel von Lagrange	29
18.2.3.1	Lagrangesche Koeffizientenfunktionen	29
18.3	SCHMIEGUNGSPOLYNOM	30
18.3.1	Potenzreihen	30
18.3.2	Konvergenzradius	30
18.3.2.1	Die Reihe konvergiert	30
18.3.2.2	Die Reihe divergiert	30
18.3.2.3	Unbestimmtes Verhalten	30
18.3.3	Maclaurin-Reihe	30
18.3.4	Taylor-Reihe	30
18.4	UNENDLICHE REIHEN	30
18.4.1	Spezielle konvergente Reihen	30
<b>19</b>	<b>LAPLACE-TRANSFORMATION</b>	<b>31</b>
19.1	LAPLACE-TRANSFORMATION	31
19.1.1	Zeit zu Bild	31
19.1.1.1	Konvergenz	31
19.1.2	Bild zu Zeit	31
19.2	SÄTZE	31
19.2.1	Linearität	31
19.2.2	Ähnlichkeitssatz	31
19.2.3	Verschiebungssatz	31
19.2.3.1	Verschiebung im Zeitbereich	31
19.2.4	Dämpfungssatz = Verschiebung im Bildbereich	31
19.2.5	Differentiation	31
19.2.5.1	Differentiation im Zeitbereich	31
19.2.6	Integration	32
19.2.7	Faltung	32
19.2.8	Diracstoss und Laplace	32
19.3	DERIVIERTE ABLEITUNG	32
19.3.1	Verallgemeinerte Ableitungsregel	32
19.4	WICHTIGE TRANSFORMATIONEN	32
19.5	OHMSCHES GESETZ IM BILDRAUM	33
19.5.1	Widerstand	33
19.5.2	Spule	33
19.5.3	Kondensator	33
19.6	LAPLACE-TRANSFORMIERTE EINER PERIODISCHEN FUNKTION	33
19.7	GRENZWERTSÄTZE	33
19.7.1	Anfangswertsatz	33
19.7.2	Endwertsatz	33
19.8	SÄTZE FÜR BILDFUNKTIONEN	34
19.8.1	Differentiationssatz	34
19.8.2	Integrationsatz	34
19.8.2.1	Grenzfall $p \rightarrow 0$	34

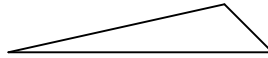
19.9	ÜBERTRAGUNGSVERHALTEN VON NETZWERKEN .....	34
19.9.1	Übertragungsglied .....	34
19.9.1.1	Impulsantwort .....	34
19.9.1.2	Sprungantwort .....	34
19.9.1.3	Zusammenhang .....	34
19.9.2	Stabilität .....	34
19.10	FREQUENZGANG .....	35
19.10.1	Sinus auf ein Übertragungsglied .....	35
19.10.1.1	Übertragungsglied .....	35
19.10.1.2	Eingang .....	35
19.10.1.3	Ausgang nach langer Zeit .....	35
<b>20</b>	<b>Z-TRANSFORMATION.....</b>	<b>36</b>
20.1	DEFINITION .....	36
20.1.1	Herleitung .....	36
20.1.1.1	Wertefolge von Zeitfunktion .....	36
20.1.1.2	LT von Wertefolge .....	36
20.1.1.3	Substitution .....	36
20.1.2	Definition .....	36
20.1.2.1	Wertefolge .....	36
20.1.2.2	Zeitfunktion .....	36
20.2	RECHENREGELN .....	37
20.2.1	Linearität .....	37
20.2.2	Verschiebungsregel nach rechts .....	37
20.2.2.1	Falls $f(t)=0$ für $t<0$ .....	37
20.2.3	Verschiebungsregel nach links .....	37
20.2.4	Dämpfungsregel .....	37
20.2.5	Differenzbildungs- und Summationsregel .....	37
20.2.5.1	1. Differenzbildungsregel .....	37
20.2.5.2	2. Differenzbildungsregel .....	37
20.2.5.3	Summationsregel .....	37
20.2.6	Differentiationsregel für die Bildfunktion .....	37
20.2.7	Faltungsregel .....	38
20.2.7.1	Faltungsregel für Zeitfunktionen .....	38
20.2.7.2	Faltungsregel für Zahlenfolgen .....	38
20.2.7.3	Faltungsregel der Z-Transformation .....	38
20.2.8	Grenzwertsätze .....	38
20.2.8.1	Anfangswertsatz .....	38
20.2.8.2	Endwertsatz .....	38
20.3	WICHTIGE Z-TRANSFORMIERTE .....	38
20.4	Z-TRANSFORMATION VON LAPLACE-TRANSFORMIERTEN .....	39
20.4.1	Z-Transformation rationaler Funktionen von $s$ .....	39
20.4.1.1	1. Fall: $F(s)$ hat nur die einfachen Pole $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .....	39
20.4.1.2	2. Fall: $F(s)$ hat einen $q$ -fachen Pol $\alpha$ , $q=2,3$ .....	39
20.4.2	Z-Transformation rationaler Funktionen von $e^s$ .....	39
20.4.2.1	Z-Transformierte von einer rationalen Funktion von $e^s$ .....	39
20.4.3	Lösung von Differenzgleichungen .....	39
20.4.3.1	Differenzgleichung für Zeitfunktionen .....	39
20.4.3.2	Differenzgleichung für Zahlenfolgen .....	39
20.4.4	Z-Transformation des Produktes von $R_1(e^s)$ und $R_2(s)$ .....	39
20.5	REGELKREIS .....	40
20.5.1	offener Regelkreis .....	40
20.5.1.1	$s$ -Übertragungsgleichung .....	40
20.5.1.2	$z$ -Übertragungsgleichung .....	40
20.5.2	geschlossener Regelkreis .....	40
20.5.2.1	$z$ -Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises .....	40
20.5.2.2	$z$ -Übertragungsgleichung .....	40
20.5.3	Rekursive Berechnung der Ausgangswerte $x_k$ (ohne Rücktransformation von $X_k$ ) .....	41
20.5.3.1	Sobald $F_k$ bekannt .....	41
20.5.3.2	Rücktransformation .....	41
20.5.4	Stabilität .....	41
20.5.4.1	Regelkreis ist stabil, wenn: .....	41
20.6	RÜCKTRANSFORMATION .....	41
20.6.1	Zeitfunktion aus Wertefolge .....	41
20.6.2	Wichtige Zeittransformierte .....	41

<b>21</b>	<b>WARSCHENLICHKEITSRECHNUNG .....</b>	<b>42</b>
21.1	WAHSCHENLICHKEIT .....	42
21.1.1	Begriffe .....	42
21.1.1.1	Unvereinbar .....	42
21.1.2	Axiome .....	42
21.1.3	Folgerungen .....	42
21.1.3.1	Die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses .....	42
21.1.3.2	Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses .....	42
21.1.3.3	Die Wahrscheinlichkeit mehrerer unvereinbarer Ereignisse .....	42
21.1.3.4	Die Wahrscheinlichkeit von A, wenn $A \subset B$ .....	42
21.1.3.5	Grenzen für die Wahrscheinlichkeit .....	42
21.1.3.6	Additionssatz für zwei beliebige Ereignisse .....	42
21.1.3.7	Gleichwahrscheinliche Ereignisse (klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff) .....	42
21.1.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	43
21.1.4.1	Allgemeine Definition .....	43
21.1.4.2	Der Multiplikationssatz .....	43
21.1.4.3	Unabhängig .....	43
21.1.4.4	Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse .....	43
21.1.4.5	Formel von Sylvester .....	43
21.1.5	Geometrische Wahrscheinlichkeit .....	43
21.2	VERTEILUNGEN .....	44
21.2.1	Binomische Verteilung (Urnenmodell, Ziehen mit Zurücklegen) .....	44
21.2.1.1	Newtonsche Formel .....	44
21.2.2	Hypergeometrische Verteilung (Urnenmodell, Ziehen ohne Zurücklegen) .....	44
21.2.2.1	Approximation durch die binomische Verteilung .....	44
21.2.3	Die Poisson Verteilung .....	44
21.3	ZUFALLSVARIABLE .....	44
21.3.1	Erwartungswert .....	44
21.3.2	Varianz .....	44
21.3.3	Standardabweichung .....	44
21.3.4	Spezialfälle .....	44
21.3.4.1	Zufallsvariable binomisch verteilt .....	44
21.3.4.2	Zufallsvariable Poisson-verteilt .....	44
21.4	NORMALVERTEILUNG .....	45
21.4.1	Gaussche Glockenkurve .....	45
21.4.2	Standardisierung der Zufallsvariablen .....	45
21.4.3	Die binomisch verteilte Zufallsvariable .....	45
21.4.4	Der zentrale Grenzwertsatz .....	45

# 1 Goniometrie

## 1.1 sin(α+β)

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$
$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$	$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha - \cot \beta}$



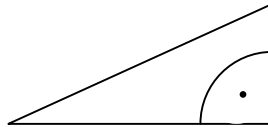
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

## 1.2 sin(α)

$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	$\sin \alpha = 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2$	$\sin(\alpha/2) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$\cos \alpha = \cos^2 \alpha/2 - \sin^2 \alpha/2$	$\cos(\alpha/2) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$	$\cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha/2 - 1$	$\tan(\alpha/2) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$
$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha/2$	$\cot(\alpha/2) = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$
$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\tan \alpha = \frac{2 \tan \alpha/2}{1 - \tan^2 \alpha/2}$	
$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{\cot^2 \alpha/2 - 1}{2 \cot \alpha/2}$	



$$\sin \alpha = GK/H$$

$$\cos \alpha = AK/H$$

$$\tan \alpha = GK/AK = \sin \alpha / \cos \alpha$$

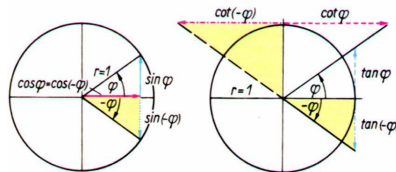
$$\cot \alpha = GK/H = \cos \alpha / \sin \alpha$$

## 1.3 + -> \*

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$
$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$

## 1.4 \* -> +

$\sin \alpha \cdot \sin \beta = 1/2 (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
$\sin \alpha \cdot \cos \beta = 1/2 (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$
$\cos \alpha \cdot \cos \beta = 1/2 (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
$\cos \alpha \cdot \sin \beta = 1/2 (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

## 1.5 α+β << 1°

$\sin(\alpha + \beta) \approx \sin \alpha + \sin \beta$
$\sin(\alpha - \beta) \approx \sin \alpha - \sin \beta$
$\tan(\alpha + \beta) \approx \tan \alpha + \tan \beta$
$\tan(\alpha - \beta) \approx \tan \alpha - \tan \beta$
$\sin(n\alpha) \approx n \sin \alpha$
$\tan(n\alpha) \approx n \tan \alpha$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1/2$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\tan 30^\circ = \sqrt{3}/3$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

## 1.6 Hilfswinkel

$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$
$\varphi = \arctan b/a$
$\cos(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi$

# 2 Mengen

$$N := \{1,2,3,\dots\}$$

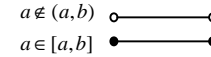
$$N_0 := \{0,1,2,\dots\}$$

$$Z := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$Q := \{a/b \mid a \in Z, b \in Z \setminus \{0\}\}$$

$$R := Q \wedge \{\dots, \sqrt{2}, e, \pi, \sqrt{5}, \dots\}$$

$$N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R$$

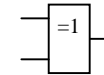


$$L \subset D \subset G$$

# 3 Binäre Funktionen

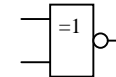
EXOR:

$$Y = A \oplus B = A\bar{B} + \bar{A}B = \overline{A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}}$$



EXNOR:

$$Y = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$



# 4 Beträge

$$\left| \frac{a \cdot b}{c} \right| = \frac{|a| \cdot |b|}{|c|}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

## 5 Logarithmus

$$b = a^x$$

$$a = \sqrt[x]{b}$$

$$x = \log_a b$$

$$\log_a (u \cdot v / w) = \log_a u + \log_a v - \log_a w$$

$$\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$$

$$\log_b z = \frac{\log z}{\log b}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

## 6 Thermumformung

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

## 7 Eulersche Symbol

n:										
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
k:										

$$0! := 1$$

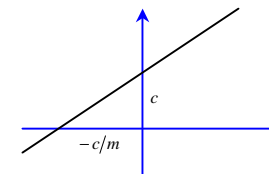
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

## 8 Funktionen

### 8.1 Lineare Gleichung

$$y = mx + c$$



### 8.2 Kegelschnitte

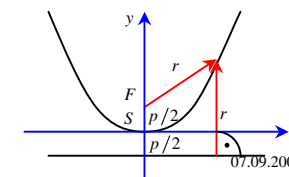
Diskussion der Kegelschnittgleichung $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$			
$AC \neq 0$	$N = D^2/A + E^2/C - F$		
	$N > 0$	$A > 0, C > 0$	Ellipse
		$A < 0, C < 0$	keine reelle Kurve
		$AC < 0$	Hyperbel
	$N = 0$	$AC > 0$	Punkt
		$AC < 0$	Paar sich schneidender Geraden
$N < 0$	$A > 0, C > 0$	keine reelle Kurve	
	$A < 0, C < 0$	Ellipse	
	$AC < 0$	Hyperbel	
$AC = 0$	$A = 0, C \neq 0$	$D \neq 0$	Parabel
		$D = 0$	Paar paralleler Geraden, die zusammenfallen, wenn $E^2 - FC = 0$
	$A \neq 0, C = 0$	$E \neq 0$	Parabel
		$E = 0$	Paar paralleler Geraden, die zusammenfallen, wenn $D^2 - FA = 0$
	$A = 0, C = 0$	nicht $D = E = 0$	Gerade
		$D = E = 0$	(trivial)

#### 8.2.1 Parabel

$$y = \frac{1}{2p} x^2; S = (0; 0); F = (0; \frac{p}{2}); l = -\frac{p}{2}$$

#### 8.2.2 Allgemeine Parabelgleichung

$$y = \frac{1}{2p} x^2 + \frac{-x_s}{p} x + \left( \frac{x_s^2}{2p} + y_s \right); S = (x_s; y_s); F = (x_s; y_s + p/2); l = y_s - p/2$$



### 8.2.3 Quadratische Gleichung

$$0 = ax^2 + bx + c$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$0 = x^2 + px + q$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2 + \frac{-x_s}{p}x$$

$$y = ax^2 + bx$$

$$x_s = \frac{b}{-2a}$$

## 9 Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad ; \quad +, \text{ wenn rechtssystem}$$

$$[\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$$[x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}] = xyz[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \quad ; \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

## 10 Lineare Gleichungssysteme

### 10.1 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

$$D = \det A = |A| := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$D_1 := \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$D_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

$$x_1 = D_1/D; x_2 = D_2/D$$

$D \neq 0 \rightarrow 1$  Lösung

$D = 0; D_{1,2} = 0 \rightarrow$  Unendlich viele Lösungen

$D = 0; D_{1,2} \neq 0 \rightarrow$  keine Lösung

### 10.2 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

## 11 Kombinatorik

### 11.1 Permutationen mit nur unterschiedlichen Elementen

a,b,c                      abc, acb, bac, bca, cab, cba

$$P(n) = V(n, n) = n!$$

### 11.2 Permutationen mit $k_1, k_2, \dots, k_m$ identischen Elementen

a,a,b                      aab, aba, baa

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

### 11.3 Variationen ohne Wiederholung, Reihenfolge wesentlich, Anordnung

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

### 11.4 Variationen mit Wiederholung, Reihenfolge wesentlich, Anordnung

$$\bar{V}(n, k) = n^k$$

### 11.5 Kombinationen ohne Wiederholung, Reihenfolge unwesentlich, Auswahl

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

### 11.6 Kombinationen mit Wiederholung, Reihenfolge unwesentlich, Auswahl

$$\bar{C}(n, k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n+k-1-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

## 12 Folgen

### 12.1 Arithmetische Folgen

$$d = a_{n+1} - a_n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

### 12.2 Geometrische Folgen

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$q, a_1 \neq 0$$

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

## 13 Differenzieren

### 13.1 Ableitungen einiger Funktionen

#### 13.1.1 Ableitungen einiger elementarer Funktionen

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

#### 13.1.2 Ableitungen der zyklometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{Arcsin} x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad |x| < 1 \\ \frac{d \operatorname{Arccos} x}{dx} &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad |x| < 1 \\ \frac{d \operatorname{Arctan} x}{dx} &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d \operatorname{Arccot} x}{dx} &= \frac{-1}{1+x^2} \end{aligned}$$

#### 13.1.3 Ableitungen der Areafunktionen

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{arsinh} x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \frac{d \operatorname{Arcosh} x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; \quad x > 1 \\ \frac{d \operatorname{artanh} x}{dx} &= \frac{1}{1-x^2}; \quad |x| < 1 \\ \frac{d \operatorname{arcoth} x}{dx} &= \frac{1}{1-x^2}; \quad |x| > 1 \end{aligned}$$

### 13.2 Differentiationsregeln

$$(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3)' = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x)$$

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x))' = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot f_3(x) + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3'(x)$$

$$(f^n(x))' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## 14 Integration

### 14.1 Tabelle der Grundintegrale

#### Tabelle der Grundintegrale

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{für } x \text{ beliebig, falls } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ \text{sowie für } x \neq 0, \text{ falls } n = -2, -3, -4, \dots$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad \text{für } x \neq 0 \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int x^\alpha dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C \quad \text{für } x > 0, \alpha \in \mathbf{R} \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad \text{für } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \qquad \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad \text{für } x \neq k\pi; k \in \mathbf{Z} \qquad \int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C \qquad \int a^x dx = a^x / \ln a + C \quad \text{für } a > 0, a \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{coth} x + C \quad \text{für } x \neq 0 \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C'$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x + C = -\operatorname{Arccos} x + C' \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C'$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{Arcosh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C' & \text{für } x > 1 \\ -\operatorname{Arcosh}(-x) + C = -\ln(-x + \sqrt{x^2-1}) + C' & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C' & \text{für } |x| < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C' & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

### 14.2 Partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) + \int u'(x) \cdot v(x) \cdot dx$$

$$\int_{a1}^{a2} u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = [u(x) \cdot v(x)]_{a1}^{a2} - \int_{a1}^{a2} u'(x) \cdot v(x) \cdot dx$$

### 14.3 Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int f(u) \cdot du \quad \text{für } u = g(x)$$

$$\int f(u) \cdot u' \cdot dx = \int f(u) \cdot du \quad \text{für } u = g(x)$$

$$\int_{a1}^{a2} f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int_{g(a1)}^{g(a2)} f(u) \cdot du \quad \text{für } u = g(x)$$



## 14.4 Sektorenformeln

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cdot d\varphi$$

### 14.4.1 Leibnizische Sektorenformel

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y) \cdot dt$$

## 14.5 Linien- und Kurvenintegrale

### 14.5.1 Tangentenvektor einer Kurve

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

### 14.5.2 Kurvenintegral eines Vektorfeldes

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt$$

## 14.6 Bogenlänge

### 14.6.1 Kartesisch

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

### 14.6.2 Parameterdarstellung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

### 14.6.3 Polarkoordinaten

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi$$

$$ds = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi$$

## 15 Komplexe Zahlen C

### 15.1 Schreibweisen

#### 15.1.1 Normalform

$$z = a + bj$$

#### 15.1.2 Polarform

$$z = r \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \cdot \text{cis } \varphi$$

#### 15.1.3 Exponentialform

$$z = r \cdot e^{j\varphi}$$

#### 15.1.4 Umrechnungen

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$a = r \cdot \cos \varphi$$

$$b = r \cdot \sin \varphi$$

### 15.2 Symbolische Methode in der ET

#### 15.2.1 Transformation

$$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \rightarrow \underline{U} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \underline{u}_0 \cdot e^{j\omega t}$$

$$i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{I} = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{i}_0 \cdot e^{j\omega t}$$

##### 15.2.1.1 Komplexe Amplituden

$$\underline{u}_0 = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}$$

$$\underline{i}_0 = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}$$

#### 15.2.2 Komplexe Widerstände

$$\underline{Z}_R = R$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

#### 15.2.3 Ohmsches Gesetz

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

##### 15.2.3.1 Für Amplituden

$$\underline{u}_0 = \underline{z} \cdot \underline{i}_0$$

## 15.3 Rechenregeln

### 15.3.1 Rechnen mit Beträgen

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

### 15.3.2 Konjugiert-Komplexe Zahlen

$$z = a + bj = r \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \cdot \text{cis } \varphi = r \cdot e^{j\varphi}$$

$$\bar{z} = a - bj = r \cdot (\cos \varphi - j \sin \varphi) = r \cdot \text{cis}(-\varphi) = r \cdot e^{-j\varphi}$$

$$|z| = \text{abs}(z) = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

### 15.3.3 Die Inverse von z

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a - bj}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot \text{cis}(-\varphi) = \frac{1}{r} \cdot e^{-j\varphi}$$

### 15.3.4 Potenzieren

$$(\text{cis } \varphi)^n = \text{cis}(n\varphi)$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$e^{j\pi} = -1$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$e^{jk\pi} = (-1)^k$$

$$e^{jk2\pi} = 1$$

### 15.3.5 Multiplikation und Division

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis}(\varphi_1 + \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \text{cis}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\text{arc}(z_1 \cdot z_2) = \text{arc}(z_1) + \text{arc}(z_2)$$

$$\text{arc}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{arc}(z_1) - \text{arc}(z_2)$$

#### 15.3.5.1 Multiplikation und Division mit j

$$z \cdot j = r \cdot e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\frac{z}{j} = r \cdot e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

### 15.3.6 Wurzeln

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

#### 15.3.6.1 Einheitswurzeln

$$\sqrt[n]{1} = \text{cis}\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = e^{jk \frac{2\pi}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

## 15.3.7 Exponentialfunktion

$$z = x + jy$$

$$e^z = e^x \cdot (\cos(y) + j \sin(y))$$

$$|e^z| = e^{\text{Re } z}$$

$$\text{arc}(e^z) = \text{Im } z$$

#### 15.3.7.1 Potenzgesetze

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$$(e^z)^n = e^{n \cdot z}$$

$$e^{z + k2\pi j} = e^z \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

#### 15.3.7.2 Spezialfälle

$$e^{j(\varphi + k2\pi)} = e^{j\varphi} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$e^{k2\pi j} = 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## 15.3.8 Logarithmen

$$\ln z = \ln r + j\varphi \quad -\pi < \varphi < \pi$$

$$\ln z = \ln r + j(\varphi + k2\pi) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

#### 15.3.8.1 Logarithmen negativer Zahlen

$$\ln(-a) = \ln a + j\pi \quad a \in R^+$$

## 16 Differentialgleichungen

### 16.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

#### 16.1.1 Formen

##### 16.1.1.1 implizite Form

$$F(x, y, y') = 0$$

##### 16.1.1.2 explizite Form

$$y' = g(x, y)$$

#### 16.1.2 Lösungsverfahren für die explizite Form

##### 16.1.2.1 Isoklinenverfahren (graphisch)

$$g(x, y) = c$$

##### 16.1.2.2 Methode der Variablentrennung

$$y' = g(x) \cdot h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$$

$$\Rightarrow y = f(x)$$

### 16.2 lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

#### 16.2.1 homogene Dgl mit konstanten Koeffizienten

$$a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

##### 16.2.1.1 Lösung durch charakteristische Gleichung

$$y = C \cdot e^{kx}$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot k + a_0 = 0$$

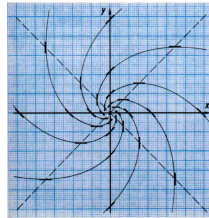
$$\Rightarrow y = C \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

#### 16.2.2 homogene Dgl

$$y' + g(x) \cdot y = 0$$

##### 16.2.2.1 Lösungsverfahren

Siehe Isoklinenverfahren oder Trennen der Variablen



#### 16.2.3 inhomogene Dgl

##### 16.2.3.1 Allgemeine Form

$$g_1(x) \cdot y' + g_0(x) \cdot y = s_0(x)$$

##### 16.2.3.2 Normalform

$$y' + g(x) \cdot y = s(x)$$

##### 16.2.3.3 Lösung durch Zusammensetzen

$$y = y_h + y_p$$

#### 16.2.4 finden einer partikulären Lösung (bei konstanten Koeffizienten)

$$y_p = a \cdot s(x) + b \cdot s'(x) + c \cdot s''(x) + \dots$$

$\Rightarrow$  einsetzen

$\Rightarrow$  Koeffizientenvergleich

#### 16.2.5 Variation der Konstanten

##### 16.2.5.1 homogene Dgl

$$y' + g(x) \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow y_h = K \cdot e^{-\int g(x) dx}$$

##### 16.2.5.2 inhomogene Dgl

$$y' + g(x) \cdot y = s(x)$$

$$\Rightarrow y = K(x) \cdot e^{-\int g(x) dx}$$

$$K'(x) \cdot e^{-\int g(x) dx} = s(x)$$

#### 16.2.6 Durch Substitution lösbare Dgl 1. Ordnung

##### 16.2.6.1 1. Typ

$$y' + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u = \frac{y}{x}$$

##### 16.2.6.2 2. Typ

$$y' + f(a \cdot x + b \cdot y + c)$$

$$u = a \cdot x + b \cdot y + c$$

## 16.3 Orthogonale Trajektorien

### 16.3.1 Gegebene Kurvenschar

$$y = f(x, c)$$

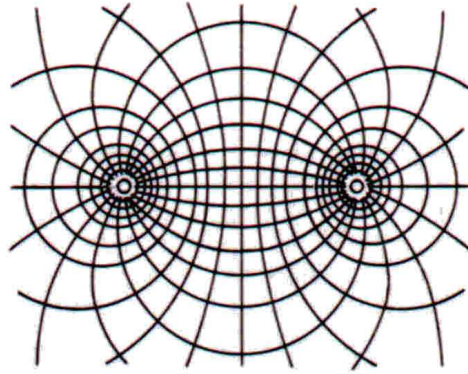
#### 16.3.1.1 Dgl dieser Kurvenschar

$$y' = g(x, y)$$

### 16.3.2 Gesuchte Kurvenschar

#### 16.3.2.1 Dgl

$$y' = -\frac{1}{g(x, y)}$$



## 16.4 Exakte Differentialgleichungen

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

$$P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = 0$$

### 16.4.1 Definition

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

### 16.4.2 Integrierende Faktoren

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

#### 16.4.2.1 Fall 1

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x)$$

$$\Phi(x) := \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

$$\ln(\mu) = \int \Phi(x) dx$$

#### 16.4.2.2 Fall 2

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = f(y)$$

$$\Psi(y) := \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$$

$$\ln(\mu) = \int \Psi(y) dy$$

## 17 Fourier

### 17.1 Reelle Fourierreihen

#### 17.1.1 Fourier-Reihen mit Periode $2\pi$

##### 17.1.1.1 Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3, \dots$$

##### 17.1.1.2 Trigonometrische Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx + \dots$$

##### 17.1.1.3 Trigonometrische Summe

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

#### 17.1.2 Fourier-Reihen mit Periode $T$

##### 17.1.2.1 Koeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\omega nx) dx \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\omega nx) dx \end{aligned} \right\} n = 1, 2, 3, \dots$$

##### 17.1.2.2 Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} x\right) + a_2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} 2x\right) + \dots + a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + \dots \\ + b_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} x\right) + b_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} 2x\right) + \dots + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + \dots$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos \omega t + a_2 \cdot \cos 2\omega t + \dots + a_n \cdot \cos n\omega t + \dots \\ + b_1 \cdot \sin \omega t + b_2 \cdot \sin 2\omega t + \dots + b_n \cdot \sin n\omega t + \dots$$

### 17.1.3 Spezialfälle

#### 17.1.3.1 Gerade Funktion Periode $2\pi$

$$f(x) = f(-x)$$

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = \dots = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

#### 17.1.3.2 Gerade Funktion Periode $T$

$$f(t) = f(-t)$$

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = \dots = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

#### 17.1.3.3 Ungerade Funktion Periode $2\pi$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

#### 17.1.3.4 Ungerade Funktion Periode $T$

$$f(-t) = -f(t)$$

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

### 17.1.4 Darstellung von $f$ als reine Sinusreihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cdot \sin(n\omega t + \varphi_n)]$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

### 17.1.5 Mit TI-89

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \left. \vphantom{\cos(n\pi)} \right\} n = -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\cos(@ n1 * \pi) \rightarrow (-1)^{\text{@} n1}$$

$$\text{Diamant} + \text{STO} \rightarrow @$$

## 17.2 Komplexe Darstellung der Fourierreihe

$$e^{-j^n \pi} = e^{j^n \pi} = (-1)^n$$

### 17.2.1 Komplexe Fourierreihe

#### 17.2.1.1 Periode $2\pi$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n \cdot t}$$

#### 17.2.1.2 Periode $T$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \frac{2\pi}{T} t}$$

### 17.2.2 Komplexe und reelle Koeffizienten

#### 17.2.2.1 Komplex aus Reell

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - j \cdot b_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + j \cdot b_n}{2}$$

#### 17.2.2.2 Reell aus Komplex

$$a_0 = 2 \cdot c_0$$

$$a_n = 2 \cdot \text{Re}(c_n)$$

$$b_n = -2 \cdot \text{Im}(c_n)$$

### 17.2.3 Berechnung des komplexen Koeffizienten

#### 17.2.3.1 Periode $2\pi$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-j \cdot n \cdot t} dt \quad \left. \vphantom{c_n} \right\} n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

#### 17.2.3.2 Periode $T$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j \cdot n \cdot \omega t} dt \quad \left. \vphantom{c_n} \right\} n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

## 17.3 Fourierintegral komplex

### 17.3.1 Gleichungspaar mit Kreisfrequenz $\omega$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$$

$$f(t) \xrightarrow{\bullet} F(\omega)$$

#### 17.3.1.1 Spektralfunktion

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

#### 17.3.1.2 Fourierintegral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

### 17.3.2 Gleichungspaar mit Frequenz $f$

#### 17.3.2.1 Spektralfunktion

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

#### 17.3.2.2 Fourierintegral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{-j2\pi f t} df$$

### 17.3.3 Spektralfunktion, Spektraldichte oder Frequenzfunktion

#### 17.3.3.1 Spektralfunktion ist komplex

$$F(\omega) = \operatorname{Re}(F(\omega)) + j \cdot \operatorname{Im}(F(\omega))$$

$$F(\omega) = \Re(\omega) + j \cdot \Im(\omega)$$

#### 17.3.3.2 Exponentialform

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{[\Re(\omega)]^2 + [\Im(\omega)]^2}$$

$$\tan(\varphi(\omega)) = \frac{\Im(\omega)}{\Re(\omega)} \Rightarrow \varphi(\omega)$$

## 17.4 Fourierintegral in der reellen Form

Falls  $f(t)$  reellwertig ist

### 17.4.1 Spektralfunktion und Fourierintegral

$$\operatorname{Re}(F(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt$$

$$\operatorname{Im}(F(\omega)) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\operatorname{Re}(F(\omega)) \cdot \cos(\omega \cdot t) - \operatorname{Im}(F(\omega)) \cdot \sin(\omega \cdot t)] d\omega$$

### 17.4.2 Spezialfälle

#### 17.4.2.1 Gerade Funktion

$$\operatorname{Re}(F(\omega)) = \operatorname{Re}(F(-\omega))$$

$$\operatorname{Re}(F(\omega)) = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt$$

$$\operatorname{Im}(F(\omega)) = 0$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}(F(\omega)) \cdot \cos(\omega \cdot t) d\omega$$

#### 17.4.2.2 Ungerade Funktion

$$\operatorname{Im}(F(\omega)) = -\operatorname{Im}(F(-\omega))$$

$$\operatorname{Im}(F(\omega)) = -2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt$$

$$\operatorname{Re}(F(\omega)) = 0$$

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}(F(\omega)) \cdot \sin(\omega \cdot t) d\omega$$

## 18 Reihenentwicklung

### 18.1 Ausgleichsproblem

$$S(a; b; c; \dots) = \sum_{i=1}^n [P_n(x_i) - y_i]^2 = \min$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \dots$$

#### 18.1.1 Lösungsansätze

##### 18.1.1.1 Lineare Funktion (Gerade)

$$y = a \cdot x + b$$

##### 18.1.1.2 Quadratische Funktion (Parabel)

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

##### 18.1.1.3 Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^b$$

##### 18.1.1.4 Exponentialfunktion

$$y = a \cdot e^{b \cdot x}$$

### 18.2 Interpolationsproblem

#### 18.2.1 Gegebene Kurve

$$P_0 = (x_0; y_0), \quad P_1 = (x_1; y_1), \quad P_2 = (x_2; y_2), \quad \dots, \quad P_n = (x_n; y_n)$$

#### 18.2.2 Polynom

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

#### 18.2.3 Interpolationsformel von Lagrange

$$y = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + \dots + y_n \cdot L_n(x)$$

##### 18.2.3.1 Lagrangesche Koeffizientenfunktionen

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2) \cdot (x_0-x_3) \cdot \dots \cdot (x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2) \cdot (x_1-x_3) \cdot \dots \cdot (x_1-x_n)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_3) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1) \cdot (x_2-x_3) \cdot \dots \cdot (x_2-x_n)}$$

...

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0) \cdot (x_n-x_1) \cdot (x_n-x_2) \cdot \dots \cdot (x_n-x_{n-1})}$$

## 18.3 Schmiegunbspolynom

### 18.3.1 Potenzreihen

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_k \cdot x^k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

### 18.3.2 Konvergenzradius

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$$

#### 18.3.2.1 Die Reihe konvergiert

$$|x| < r$$

#### 18.3.2.2 Die Reihe divergiert

$$|x| > r$$

#### 18.3.2.3 Unbestimmtes Verhalten

$$|x| = r$$

### 18.3.3 Maclaurin-Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

### 18.3.4 Taylor-Reihe

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot h^3 + \dots$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x-x_0)^3 + \dots$$

## 18.4 Unendliche Reihen

### 18.4.1 Spezielle konvergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = 1$$

## 19 Laplace-Transformation

### 19.1 Laplace-Transformation

$$s \hat{=} p \hat{=} \delta + j\omega$$

$$f(t) \cdot \varepsilon(t) = f(t)$$

#### 19.1.1 Zeit zu Bild

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

##### 19.1.1.1 Konvergenz

das Integral konvergiert, wenn:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \cdot e^{-\delta t} = 0$$

#### 19.1.2 Bild zu Zeit

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{\infty} F(s) \cdot e^{pt} dp$$

## 19.2 Sätze

#### 19.2.1 Linearität

$$\mathcal{L}\{\mu \cdot f(t) + \lambda \cdot g(t)\} = \mu \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} + \lambda \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$$

#### 19.2.2 Ähnlichkeitssatz

$$f(a \cdot t) \hat{\circ} \rightarrow \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$$

#### 19.2.3 Verschiebungssatz

##### 19.2.3.1 Verschiebung im Zeitbereich

$$f(t) \hat{\circ} \rightarrow F(p)$$

$$f^*(t) = f(t - t_0) \cdot \varepsilon(t - t_0)$$

$$f^*(t) \hat{\circ} \rightarrow F(p) \cdot e^{-p \cdot t_0}$$

#### 19.2.4 Dämpfungssatz = Verschiebung im Bildbereich

Zuerst Dämpfen, dann verschieben!

$$f(t) \cdot e^{-at} \hat{\circ} \rightarrow F(p + a)$$

#### 19.2.5 Differentiation

##### 19.2.5.1 Differentiation im Zeitbereich

$$f'(t) \hat{\circ} \rightarrow p \cdot F(s) - f(+0)$$

$$f''(t) \hat{\circ} \rightarrow p^2 \cdot F(s) - p \cdot f(+0) - f'(+0)$$

$$f^{(n)}(t) \hat{\circ} \rightarrow p^n \cdot F(s) - p^{n-1} \cdot f(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0)$$

#### 19.2.6 Integration

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \hat{\circ} \rightarrow \frac{1}{p} \cdot F(p)$$

$$g(t) = \int f(\tau) d\tau \hat{\circ} \rightarrow \frac{1}{p} \cdot F(p) + \frac{1}{p} \cdot F(0)$$

#### 19.2.7 Faltung

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau \hat{\circ} \rightarrow F_1(p) \cdot F_2(p)$$

$$f(t) * \varepsilon(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

#### 19.2.8 Diracstoss und Laplace

$$\int_a^b f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

$$\delta(t) \hat{\circ} \rightarrow 1$$

$$\delta(t - t_0) \hat{\circ} \rightarrow e^{-p \cdot t_0}$$

$$f(t - t_0) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \cdot \varepsilon(t - t_0)$$

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

#### 19.3 Derivierte Ableitung

$$D \varepsilon(t) = D \sigma(t) = \delta(t)$$

$$D f(t) = f'(t)$$

#### 19.3.1 Verallgemeinerte Ableitungsregel

$$D f(t) \hat{\circ} \rightarrow F(p) - f(-0)$$

#### 19.4 Wichtige Transformationen

$$\delta(t) \hat{\circ} \rightarrow 1$$

$$\delta(t - t_0) \hat{\circ} \rightarrow e^{-p \cdot t_0}$$

$$\varepsilon(t) \hat{\circ} \rightarrow \frac{1}{p}$$

$$\varepsilon(t - t_0) \hat{\circ} \rightarrow \frac{1}{p} \cdot e^{-p \cdot t_0}$$



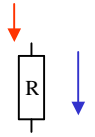
## 19.5 Ohmsches Gesetz im Bildraum

$$U(p) = Z(p) \cdot I(p)$$

$$I(p) = Y(p) \cdot U(p)$$

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$$

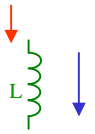
### 19.5.1 Widerstand



$$U_R(p) = R \cdot I(p)$$

$$Z_R(p) = R$$

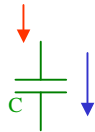
### 19.5.2 Spule



$$U_L(p) = L \cdot p \cdot I(p)$$

$$Z_L(p) = L \cdot p$$

### 19.5.3 Kondensator



$$U_C(p) = \frac{1}{C \cdot p} \cdot I(p)$$

$$Z_C(p) = \frac{1}{C \cdot p}$$

## 19.6 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-T \cdot p}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt$$

## 19.7 Grenzwertsätze

### 19.7.1 Anfangswertsatz

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$$

### 19.7.2 Endwertsatz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

## 19.8 Sätze für Bildfunktionen

### 19.8.1 Differentiationssatz

$$-t \cdot f(t) \rightsquigarrow \frac{dF(p)}{dp}$$

$$(-t)^n \cdot f(t) \rightsquigarrow \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

### 19.8.2 Integrationsatz

$$\frac{f(t)}{t} \rightsquigarrow \int_{u=p}^{\infty} F(u) du$$

#### 19.8.2.1 Grenzfall $p \rightarrow 0$

$$\int_{p=0}^{\infty} F(p) dp = \int_{t=0}^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

## 19.9 Übertragungsverhalten von Netzwerken

### 19.9.1 Übertragungsglied

$$Y(p) = G(p) \cdot U(p)$$

#### 19.9.1.1 Impulsantwort

$$g(t) \rightsquigarrow G(p)$$

#### 19.9.1.2 Sprungantwort

$$h(t) \rightsquigarrow H(p)$$

#### 19.9.1.3 Zusammenhang

$$g(t) = D h(t)$$

$$h(t) = \int_{\tau=0}^t g(\tau) d\tau$$

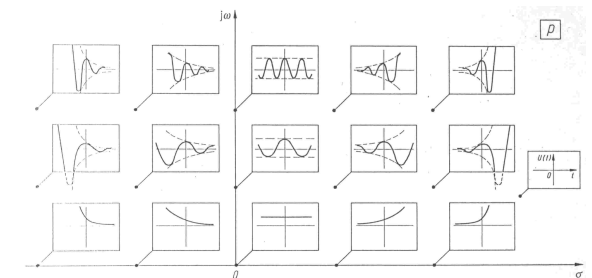
### 19.9.2 Stabilität

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

Alle Pole in LHE

(und Zählergrad kleiner gleich Nennergrad)



## 19.10 Frequenzgang

$$G(j\omega) := G(p) \Big|_{p=j\omega}$$

$$h(t) = \int_{\tau=0}^t g(\tau) d\tau$$

### 19.10.1 Sinus auf ein Übertragungsglied

#### 19.10.1.1 Übertragungsglied

$$G(j\omega) = G(p) \Big|_{p=j\omega}$$

#### 19.10.1.2 Eingang

$$u(t) = E \cdot \sin(\omega t)$$

#### 19.10.1.3 Ausgang nach langer Zeit

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = E \cdot |G(j\omega)|$$

$$\varphi = \arg G(j\omega) = \angle G(j\omega)$$

## 20 Z-Transformation

### 20.1 Definition

#### 20.1.1 Herleitung

##### 20.1.1.1 Wertefolge von Zeitfunktion

$$f(t) \rightarrow f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \delta(t - kT)$$

$$f(t) \rightarrow (f_k)$$

##### 20.1.1.2 LT von Wertefolge

$$f^*(t) \xrightarrow{\bullet} F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot e^{-kTp}$$

##### 20.1.1.3 Substitution

$$e^{Tp} = z$$

$$[F^*(p)]_{p=z} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

#### 20.1.2 Definition

##### 20.1.2.1 Wertefolge

$$F_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

$$\mathcal{F}\{f^*(t)\} = F_z(z)$$

$$f^*(t) \xrightarrow{\bullet} F_z(z)$$

##### 20.1.2.2 Zeitfunktion

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F_z(z)$$

$$f(t) \xrightarrow{\bullet} F_z(z)$$

## 20.2 Rechenregeln

### 20.2.1 Linearität

$$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) \quad \circ \rightarrow \quad c_1 \cdot F_{1z}(z) + c_2 \cdot F_{2z}(z)$$

$$c_1 \cdot f_{1k} + c_2 \cdot f_{2k} \quad \circ \rightarrow \quad c_1 \cdot F_{1z}(z) + c_2 \cdot F_{2z}(z)$$

### 20.2.2 Verschiebungsregel nach rechts

$$f(t-mT) \quad \circ \rightarrow \quad z^{-m} \cdot \left[ F_z(z) + \sum_{\nu=1}^m f_{-\nu} \cdot z^\nu \right]$$

$$f_{k-m} \quad \circ \rightarrow \quad z^{-m} \cdot \left[ F_z(z) + \sum_{\nu=1}^m f_{-\nu} \cdot z^\nu \right]$$

#### 20.2.2.1 Falls $f(t)=0$ für $t < 0$

$$f(t-mT) \quad \circ \rightarrow \quad z^{-m} \cdot F_z(z)$$

$$f_{k-m} \quad \circ \rightarrow \quad z^{-m} \cdot F_z(z)$$

### 20.2.3 Verschiebungsregel nach links

$$f(t+mT) \quad \circ \rightarrow \quad z^m \cdot \left[ F_z(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f_\nu \cdot z^{-\nu} \right]$$

$$f_{k+m} \quad \circ \rightarrow \quad z^m \cdot \left[ F_z(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f_\nu \cdot z^{-\nu} \right]$$

### 20.2.4 Dämpfungsregel

$$f(t) \cdot e^{at} \quad \circ \rightarrow \quad F_z(e^{-at} \cdot z)$$

$$\gamma = e^{-at}$$

$$f_k \cdot \gamma^{-k} \quad \circ \rightarrow \quad F_z(\gamma \cdot z)$$

### 20.2.5 Differenzbildungs- und Summationsregel

#### 20.2.5.1 1. Differenzbildungsregel

$$f(t) - f(t-T) \quad \circ \rightarrow \quad \frac{z-1}{z} \cdot F_z(z) - f_{-1}$$

$$f_k - f_{k-1} \quad \circ \rightarrow \quad \frac{z-1}{z} \cdot F_z(z) - f_{-1}$$

#### 20.2.5.2 2. Differenzbildungsregel

$$f(t+T) - f(t) \quad \circ \rightarrow \quad (z-1) \cdot F_z(z) - f_0 \cdot z$$

$$f_{k+1} - f_k \quad \circ \rightarrow \quad (z-1) \cdot F_z(z) - f_0 \cdot z$$

#### 20.2.5.3 Summationsregel

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f(t-\nu T) \quad \circ \rightarrow \quad \frac{z}{z-1} \cdot F_z(z)$$

$$\sum_{\nu=0}^k f_\nu \quad \circ \rightarrow \quad \frac{z}{z-1} \cdot F_z(z)$$

### 20.2.6 Differentiationsregel für die Bildfunktion

$$k \cdot f_k \quad \circ \rightarrow \quad -z \cdot F'_z(z)$$

$$t \cdot f(t) \quad \circ \rightarrow \quad -Tz \cdot F'_z(z)$$

## 20.2.7 Faltungsregel

### 20.2.7.1 Faltungsregel für Zeitfunktionen

$$f^*(t) * g^*(t) \quad \circ \rightarrow \quad F_z(z) \cdot G_z(z)$$

### 20.2.7.2 Faltungsregel für Zahlenfolgen

$$f_k * g_k = \sum_{\nu=0}^k f_\nu \cdot g_{k-\nu}$$

$$(f_k * g_k) = \left( \sum_{\nu=0}^k f_\nu \cdot g_{k-\nu} \right) \quad \circ \rightarrow \quad F_z(z) \cdot G_z(z)$$

### 20.2.7.3 Faltungsregel der Z-Transformation

$$f(t) * g^*(t) \quad \circ \rightarrow \quad F_z(z) \cdot G_z(z)$$

$$f^*(t) * g(t) \quad \circ \rightarrow \quad F_z(z) \cdot G_z(z)$$

## 20.2.8 Grenzwertsätze

### 20.2.8.1 Anfangswertsatz

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F_z(z) = f_0$$

### 20.2.8.2 Endwertsatz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1+0} ((z-1) \cdot F_z(z))$$

Falls alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen mit Ausnahme eines einfachen Poles in  $z=1$

## 20.3 Wichtige Z-Transformierte

$$\delta(t) \quad \circ \rightarrow \quad 1$$

$$\delta(t-mT) \quad \circ \rightarrow \quad z^{-m}$$

$$\varepsilon(t) \quad \circ \rightarrow \quad \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$e^{at} \quad \circ \rightarrow \quad \frac{1}{1-e^{aT}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{aT}}$$

$$t \quad \circ \rightarrow \quad \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$t^2 \quad \circ \rightarrow \quad T^2 \cdot z \cdot \frac{z+1}{(z-1)^3}$$

$$t^3 \quad \circ \rightarrow \quad T^3 \cdot z \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4}$$

$$(-1)^k \quad \circ \rightarrow \quad \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$

$$\beta^k \quad \circ \rightarrow \quad \frac{z}{z-\beta}$$

$$(1, \beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4, \dots) \quad \circ \rightarrow \quad \frac{z}{z-\beta}$$

$$\beta^{k-1} \quad \circ \rightarrow \quad \frac{1}{z-\beta}$$

$$(0, 1, \beta, \beta^2, \beta^3, \dots) \quad \circ \rightarrow \quad \frac{z}{z-\beta}$$

## 20.4 Z-Transformation von Laplace-Transformierten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= F(s) \\ \mathcal{L}\{F(s)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

### 20.4.1 Z-Transformation rationaler Funktionen von s

20.4.1.1 1. Fall:  $F(s)$  hat nur die einfachen Pole  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$F(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{(s - \alpha_1) \dots (s - \alpha_n)} \stackrel{\text{TI-89: expand(F(s))}}{=} \frac{r_1}{s - \alpha_1} + \frac{r_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{r_n}{s - \alpha_n}$$

$$\mathcal{L}\{F(s)\} = z \cdot \left( \frac{r_1}{z - e^{\alpha_1 T}} + \frac{r_2}{z - e^{\alpha_2 T}} + \dots + \frac{r_n}{z - e^{\alpha_n T}} \right)$$

20.4.1.2 2. Fall:  $F(s)$  hat einen  $q$ -fachen Pol  $\alpha$ ,  $q=2,3, \dots$

$$F(s) = \frac{Z(s)}{\prod_{\nu=1}^n (s - \alpha_\nu)} \rightsquigarrow F_z(z) = \frac{z \cdot M(z)}{\prod_{\nu=1}^n (z - e^{\alpha_\nu T})}$$

### 20.4.2 Z-Transformation rationaler Funktionen von $e^{Ts}$

20.4.2.1 Z-Transformierte von einer rationalen Funktion von  $e^{Ts}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{R(e^{-Ts})\} &= R(z^{-1}) \\ \mathcal{L}\{R(e^{Ts})\} &= R(z) \end{aligned}$$

### 20.4.3 Lösung von Differenzgleichungen

20.4.3.1 Differenzgleichung für Zeitfunktionen

$$a_n \cdot y(t - nT) + \dots + a_1 \cdot y(t - T) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot u(t - T) + \dots + b_m \cdot u(t - mT)$$

$$u(t) = 0 \quad t < 0$$

$$y(t) = 0 \quad t < 0$$

$$Y(s) = G(s) \cdot Z(s)$$

20.4.3.2 Differenzgleichung für Zahlenfolgen

$$a_n \cdot y_{k-n} + \dots + a_1 \cdot y_{k-1} + a_0 \cdot y_k = b_0 \cdot u_k + b_1 \cdot u_{k-1} + \dots + b_m \cdot u_{k-m}$$

$$u(t) = 0 \quad t < 0$$

$$y(t) = 0 \quad t < 0$$

$$Y_z(z) = G_z(z) \cdot Z_z(z)$$

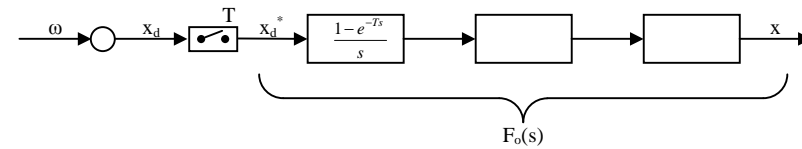
$$G_z(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_m \cdot z^{-m}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_n \cdot z^{-n}}$$

### 20.4.4 Z-Transformation des Produktes von $R_1(e^{Ts})$ und $R_2(s)$

$$\mathcal{L}\{R_1(s) \cdot R_2(e^{-Ts})\} = \mathcal{L}\{R_1(s)\} \cdot R_2(z^{-1})$$

## 20.5 Regelkreis

### 20.5.1 offener Regelkreis



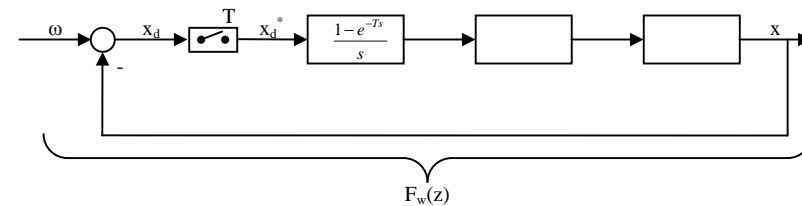
20.5.1.1  $s$ -Übertragungsgleichung

$$X(s) = X_d^*(s) \cdot F_o(s)$$

20.5.1.2  $z$ -Übertragungsgleichung

$$X_z = F_{oz} \cdot X_{dz}$$

### 20.5.2 geschlossener Regelkreis



20.5.2.1  $z$ -Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

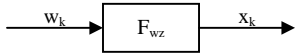
$$F_{wz} = \frac{F_{oz}}{1 + F_{oz}}$$

20.5.2.2  $z$ -Übertragungsgleichung

$$X(z) = F_w(z) \cdot W(z)$$

$$X_z = \frac{F_{oz}}{1 + F_{oz}} \cdot W_z$$

### 20.5.3 Rekursive Berechnung der Ausgangswerte $x_k$ (ohne Rücktransformation von $X_z$ )



#### 20.5.3.1 Sobald $F_w$ bekannt

$$\frac{X_z}{W_z} = F_{wz}$$

$$\frac{X_z}{W_z} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots + a_n \cdot z^{-n}}{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots + b_m \cdot z^{-m}} = \frac{A_n(z)}{B_m(z)}$$

$$X_z \cdot (a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots + a_n \cdot z^{-n}) = W_z \cdot (b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots + b_m \cdot z^{-m})$$

$$a_0 \cdot X_z + a_1 \cdot z^{-1} \cdot X_z + a_2 \cdot z^{-2} \cdot X_z + \dots + a_n \cdot z^{-n} \cdot X_z = b_0 \cdot W_z + b_1 \cdot z^{-1} \cdot W_z + b_2 \cdot z^{-2} \cdot W_z + \dots + b_m \cdot z^{-m} \cdot W_z$$

#### 20.5.3.2 Rücktransformation

$$a_0 \cdot x_k + a_1 \cdot x_{k-1} + a_2 \cdot x_{k-2} + \dots + a_n \cdot x_{k-n} = b_0 \cdot w_k + b_1 \cdot w_{k-1} + b_2 \cdot w_{k-2} + \dots + b_m \cdot w_{k-m}$$

$$x_k = \frac{(b_0 \cdot w_k + b_1 \cdot w_{k-1} + b_2 \cdot w_{k-2} + \dots + b_m \cdot w_{k-m}) - (a_1 \cdot x_{k-1} + a_2 \cdot x_{k-2} + \dots + a_n \cdot x_{k-n})}{a_0}$$

### 20.5.4 Stabilität

#### 20.5.4.1 Regelkreis ist stabil, wenn:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_k = \text{endlich}$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow \infty} x_k \right| < \infty$$

### 20.6 Rücktransformation

$$(f_k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F_z(z)\}$$

$$f^*(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{F_z(z)\}$$

#### 20.6.1 Zeitfunktion aus Wertefolge

$$f_k = \varphi(k)$$

$$f(t) = \varphi\left(\frac{t}{T}\right)$$

#### 20.6.2 Wichtige Zeittransformierte

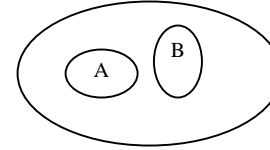
$$\frac{z}{z - \beta} \longleftrightarrow \beta^k = e^{k \cdot \ln \beta}$$

## 21 Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 21.1 Wahrscheinlichkeit

#### 21.1.1 Begriffe

##### 21.1.1.1 Unvereinbar



$$A \cap B = \Phi$$

#### 21.1.2 Axiome

$$E \in \mathcal{E}$$

$$\mathcal{E} \xrightarrow{P} \Phi$$

$$P(E) \geq 0$$

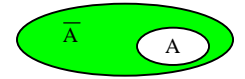
$$P(S) = 1$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) \quad \text{wenn } E \cap F = \Phi$$

#### 21.1.3 Folgerungen

##### 21.1.3.1 Die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

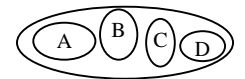


##### 21.1.3.2 Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses

$$P(\Phi) = 0$$

##### 21.1.3.3 Die Wahrscheinlichkeit mehrerer unvereinbarer Ereignisse

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$



##### 21.1.3.4 Die Wahrscheinlichkeit von A, wenn $A \subset B$

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$



##### 21.1.3.5 Grenzen für die Wahrscheinlichkeit

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

##### 21.1.3.6 Additionssatz für zwei beliebige Ereignisse

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

##### 21.1.3.7 Gleichwahrscheinliche Ereignisse (klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff)

$$P(E) = \frac{g}{m} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$$

## 21.1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

### 21.1.4.1 Allgemeine Definition

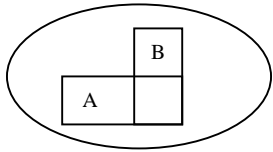
$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### 21.1.4.2 Der Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad P(B) \neq 0$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad P(A) \neq 0$$

### 21.1.4.3 Unabhängig



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Rightarrow P(A|B) = P(A)$$

$$\Rightarrow P(B|A) = P(B)$$

### 21.1.4.4 Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \dots \cdot P(E_n)$$

### 21.1.4.5 Formel von Sylvester

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$

## 21.1.5 Geometrische Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \frac{\text{Masszahl für die günstigen Fälle}}{\text{Masszahl für die möglichen Fälle}}$$

## 21.2 Verteilungen

### 21.2.1 Binomische Verteilung (Urnenmodell, Ziehen mit Zurücklegen)

#### 21.2.1.1 Newtonsche Formel

$$P_n(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

### 21.2.2 Hypergeometrische Verteilung (Urnenmodell, Ziehen ohne Zurücklegen)

$$P_n^*(x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{m-r}{n-x}}{\binom{m}{n}}$$

#### 21.2.2.1 Approximation durch die binomische Verteilung

$$\frac{n}{m} < 0.1 \quad \text{und} \quad m \geq 60$$

### 21.2.3 Die Poisson Verteilung

$$P(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\lambda = n \cdot p$$

Näherung für die Newtonsche Formel, wenn p klein (=seltenes Ereignis) und n gross.

## 21.3 Zufallsvariable

### 21.3.1 Erwartungswert

$$\mu := \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i$$

### 21.3.2 Varianz

$$\sigma^2 := \sum_{i=1}^n p_i \cdot (x_i - \mu)^2$$

### 21.3.3 Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

### 21.3.4 Spezialfälle

#### 21.3.4.1 Zufallsvariable binomisch verteilt

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

#### 21.3.4.2 Zufallsvariable Poisson-verteilt

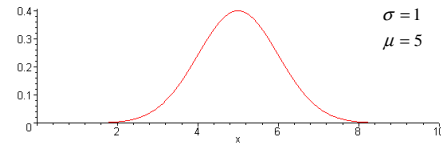
$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

## 21.4 Normalverteilung

### 21.4.1 Gaussische Glockenkurve

$$y = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



### 21.4.2 Standardisierung der Zufallsvariablen

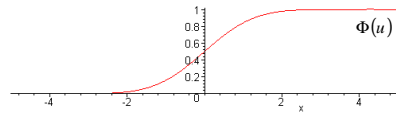
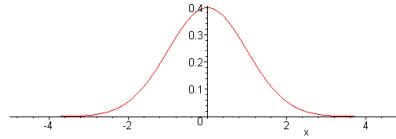
$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$u_1 = \frac{a - \mu}{\sigma}$$

$$u_2 = \frac{b - \mu}{\sigma}$$



### 21.4.3 Die binomisch verteilte Zufallsvariable...

$$\mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

$$npq > 9$$

$$P(a \leq x \leq b) = \sum_{a \leq x \leq b} P_n(x) \approx \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$$

$$u_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}$$

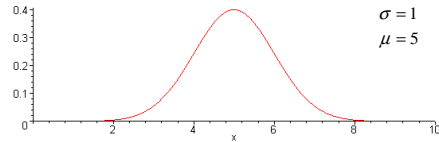
$$u_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$$

### 21.4.4 Der zentrale Grenzwertsatz

$\frac{2}{3}$  der Werte liegt in  $\mu \pm \sigma$

95% der Werte liegt in  $\mu \pm 2\sigma$

fast alle Werte liegt in  $\mu \pm 3\sigma$



Erstellt von:  
Daniel Arnold, Altdorf, Uri, Schweiz  
<http://www.lanny.ch>

Erstelldatum 29.11.1999 18:20

Letzte Änderung 28.11.2004 17:50