

Mechanik und Festigkeit

- 1 MECHANIK UND FESTIGKEIT2
- 1.1 SCHWERPUNKT2
 - 1.1.1 Schwerpunkt2
 - 1.1.2 Tabellenberechnung2
- 1.2 FLÄCHENTRÄGHEITSMOMENT2
 - 1.2.1 Flächenträgheitsmoment2
 - 1.2.1.1 Axiale Flächenträgheitsmomente2
 - 1.2.1.2 Deviationsmoment3
 - 1.2.1.3 Polares Trägheitsmoment3
 - 1.2.2 Trägheitsradien3
 - 1.2.3 Parallele Koordinatenverschiebung3
 - 1.2.3.1 Falls eine Schwerpunktschse (y,z) gleich Symmetrieachse3
 - 1.2.4 Drehung des Koordinatensystems um den Schwerpunkt3
 - 1.2.4.1 Achsen3
 - 1.2.4.2 Flächenträgheitsmomente3
 - 1.2.4.3 Widerstandsmomente3
- 1.3 HOOKSCHES GESETZ4
 - 1.3.1 Für Normalspannungen4
 - 1.3.2 Für Schubspannungen4
- 1.4 BIEGUNG4
 - 1.4.1 Gerade Biegung4
 - 1.4.1.1 Reine Biegung4
 - 1.4.1.2 Biegespannung4
 - 1.4.2 Schiefe oder allgemeine Biegung4
 - 1.4.2.1 Nulllinie4
 - 1.4.3 Direkte Methode5
 - 1.4.3.1 Biegespannungen5
 - 1.4.3.2 Lage der Neutralachse5
- 1.5 KOMBINIERTER BEANSPRUCHUNG VON BALKEN6
 - 1.5.1 Biegung und Normalkraft6
 - 1.5.2 Schub und Torsion6
 - 1.5.2.1 Im Kreisquerschnitt6
 - 1.5.3 Biegung und Schub6
 - 1.5.3.1 Gestaltänderungshypothese6
 - 1.5.4 Biegung mit Torsion6
 - 1.5.4.1 Widerstandsmoment des Kreises gegen Biegung6
 - 1.5.4.2 Widerstandsmoment des Kreises gegen Torsion6
 - 1.5.4.3 Vergleichsmoment6
 - 1.5.4.4 Vergleichsspannung6
 - 1.5.4.5 Erforderlicher Wellendurchmesser6
 - 1.5.4.6 Berechnung der Zahnkräfte7
- 1.6 SCHUB BEI QUERKRAFTBIEGUNG7
 - 1.6.1 Querkraft – Moment – Abhängigkeit7
 - 1.6.2 Schubspannung7
 - 1.6.2.1 Mittlere Schubspannung7
 - 1.6.2.2 Örtliche Schubspannungen (Bisquitformel)7
 - 1.6.3 Statisches Moment7
 - 1.6.3.1 Beim Rechteckquerschnitt7
 - 1.6.3.2 Beim Kreisquerschnitt7
 - 1.6.4 Schubfluss7
 - 1.6.5 Schub in dünnwandigen Profilen8
 - 1.6.5.1 Schubmittelpunkt8
 - 1.6.6 Schubbeanspruchung von Verbindungselementen8
 - 1.6.6.1 Geschweisst8
 - 1.6.6.2 Genietet8
- 1.7 KNICKBEANSPRUCHUNG9
 - 1.7.1 Eulerknicken9
 - 1.7.1.1 Spannung bei Knickkraft9
 - 1.7.1.2 Minimales Trägheitsmoment9
 - 1.7.1.3 Schlankheitsgrad (geometrische Grösse)9
 - 1.7.1.4 Eulerhyperbel9
 - 1.7.2 Unelastische Knickung nach Tetmajer9
 - 1.7.2.1 Johnson-Parabel10
 - 1.7.3 Dimensionierung10

1 Mechanik und Festigkeit

1.1 Schwerpunkt

1.1.1 Schwerpunkt

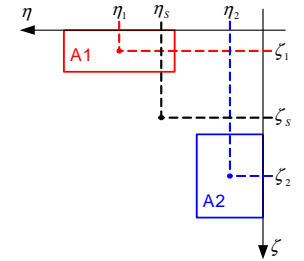
$$\eta_s = \frac{\int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta \zeta d\eta}{\int_{\eta_1}^{\eta_2} \zeta d\eta}$$

$$\zeta_s = \frac{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \zeta \eta d\zeta}{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \eta d\zeta}$$

1.1.2 Tabellenberechnung

$$\eta_s = \frac{\sum (A_i \cdot \eta_i)}{\sum (A_i)}$$

$$\zeta_s = \frac{\sum (A_i \cdot \zeta_i)}{\sum (A_i)}$$



1.2 Flächenträgheitsmoment

1.2.1 Flächenträgheitsmoment

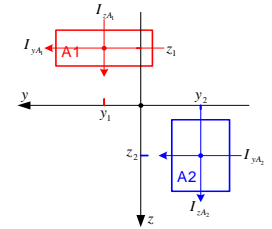
1.2.1.1 Axiale Flächenträgheitsmomente

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \sum_i (I_{yA_i} + A_i \cdot z_i^2)$$

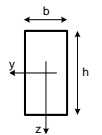
$$I_z = \sum_i (I_{zA_i} + A_i \cdot y_i^2)$$



1.2.1.1.1 Flächenträgheitsmomente des Rechtecks

$$I_y = \frac{h^3 \cdot b}{12}$$

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$



1.2.1.1.2 Flächenträgheitsmoment des Kreises

$$I = \frac{\pi}{4} \cdot r^4 = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$$

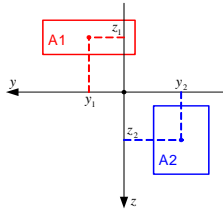
1.2.1.2 Deviationsmoment

$$I_{yz} = -\int_A yz \, dA$$

$$I_{yz} = -\sum_i (A_i \cdot y_i \cdot z_i)$$

1.2.1.3 Polares Trägheitsmoment

$$I_p = \int_A r^2 \, dA = \int_A (y^2 + z^2) \, dA = I_y + I_z$$



1.2.2 Trägheitsradien

$$i_y = \sqrt{I_y/A}$$

$$i_z = \sqrt{I_z/A}$$

$$i_p = \sqrt{I_p/A}$$

1.2.3 Parallele Koordinatenverschiebung

y,z: Schwerpunktsachsen

$$I_\eta = I_y + \zeta_s^2 \cdot A$$

$$I_\zeta = I_z + \eta_s^2 \cdot A$$

$$I_{\eta\zeta} = I_{yz} - \eta_s \cdot \zeta_s \cdot A$$

1.2.3.1 Falls eine Schwerpunktsachse (y,z) gleich Symmetrieachse

$$I_{yz} = 0$$

$$I_{\eta\zeta} = \eta_s \cdot \zeta_s \cdot A$$

1.2.4 Drehung des Koordinatensystems um den Schwerpunkt

1.2.4.1 Achsen

$$\eta = y \cdot \cos \varphi + z \cdot \sin \varphi$$

$$\zeta = -y \cdot \sin \varphi + z \cdot \cos \varphi$$

1.2.4.2 Flächenträgheitsmomente

$$I_\eta = \frac{1}{2} \cdot (I_y + I_z) + \frac{1}{2} \cdot (I_y - I_z) \cdot \cos(2\varphi) + I_{yz} \cdot \sin(2\varphi)$$

$$I_\zeta = \frac{1}{2} \cdot (I_y + I_z) - \frac{1}{2} \cdot (I_y - I_z) \cdot \cos(2\varphi) - I_{yz} \cdot \sin(2\varphi)$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{1}{2} \cdot (I_y - I_z) \cdot \sin(2\varphi) + I_{yz} \cdot \cos(2\varphi)$$

$$I_\eta + I_\zeta = I_y + I_z = \text{const}$$

$$I_\eta \cdot I_\zeta - I_{\eta\zeta}^2 = I_y \cdot I_z - I_{yz}^2$$

1.2.5 Widerstandsmomente

$$W_{y1} = \frac{I_y}{|z_{\min}|}$$

$$W_{y2} = \frac{I_y}{|z_{\max}|}$$

$$W_{z1} = \frac{I_z}{|y_{\min}|}$$

$$W_{z2} = \frac{I_z}{|y_{\max}|}$$

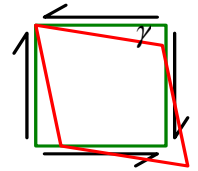
1.3 Hooksches Gesetz

1.3.1 Für Normalspannungen

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

1.3.2 Für Schubspannungen

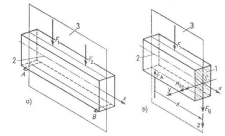
$$\tau = \gamma \cdot G$$



1.4 Biegung

1.4.1 Gerade Biegung

Lastebene schneidet Querschnittsfläche in einer Hauptachse



1.4.1.1 Reine Biegung

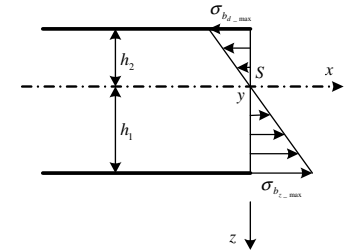
$$Q(x) = \frac{dM_b(x)}{dx} = 0$$

1.4.1.2 Biegespannung

$$\sigma(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$$\sigma_{bz \max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot h_1 = \frac{M_b}{W_{b1}}$$

$$\sigma_{bd \max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot h_2 = \frac{M_b}{W_{b2}}$$



1.4.1.2.1 Biegespannungen bei h1=h2

$$\sigma_{bz \max} = \sigma_{bd \max} = \frac{M_b}{W_b}$$

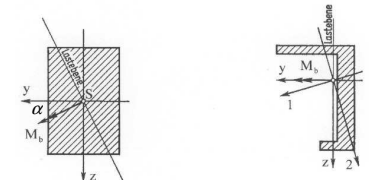
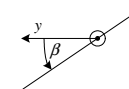
1.4.2 Schiefe oder allgemeine Biegung

$$M_y = \cos \alpha \cdot M_b$$

$$M_z = \sin \alpha \cdot M_b$$

1.4.2.1 Nulllinie

$$\tan \beta = \frac{M_z \cdot I_y}{M_y \cdot I_z}$$



1.4.3 Direkte Methode

1.4.3.1 Biegespannungen

$$\sigma_x = \left(\frac{M_y \cdot I_z - M_z \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \right) \cdot z - \left(\frac{M_z \cdot I_y - M_y \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \right) \cdot y$$

$$\bar{M}_y = \frac{M_y - M_z \cdot \frac{I_{yz}}{I_z}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y \cdot I_z}}$$

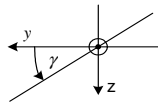
$$\bar{M}_z = \frac{M_z - M_y \cdot \frac{I_{yz}}{I_y}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y \cdot I_z}}$$

$$\sigma_x = \frac{\bar{M}_y}{I_y} \cdot z - \frac{\bar{M}_z}{I_z} \cdot y$$

1.4.3.2 Lage der Neutralachse

$$\frac{dz}{dy} = \tan(\varphi_1 + \beta) = \frac{\bar{M}_z}{\bar{M}_y} \cdot \frac{I_y}{I_z}$$

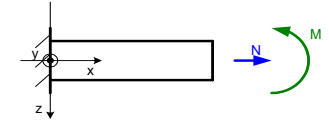
$$\gamma = \varphi_1 + \beta = \arctan\left(\frac{\bar{M}_z}{\bar{M}_y} \cdot \frac{I_y}{I_z}\right)$$



1.5 Kombinierte Beanspruchung von Balken

1.5.1 Biegung und Normalkraft

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_b = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$



1.5.2 Schub und Torsion

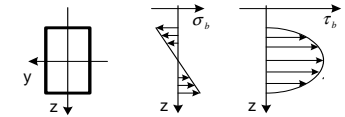
1.5.2.1 Im Kreisquerschnitt

$$\tau = \tau_q + \tau_t = \frac{4}{3} \cdot \frac{F_z}{A} + \frac{M_t}{W_p} \cdot y$$

1.5.3 Biegung und Schub

1.5.3.1 Gestaltänderungshypothese

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_m^2}$$



1.5.3.1.1 Vereinfachungen

- $l/h > 5$ nur Normalspannungen σ
- $l/h \leq 1$ nur Schubspannungen τ

1.5.4 Biegung mit Torsion

1.5.4.1 Widerstandsmoment des Kreises gegen Biegung

$$W_b = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

1.5.4.2 Widerstandsmoment des Kreises gegen Torsion

$$W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 2 \cdot W_b$$

1.5.4.3 Vergleichsmoment

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3(\alpha_0 \cdot \tau_t)^2}$$

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + \frac{3}{4}(\alpha_0 \cdot M_t)^2}$$

1.5.4.4 Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \frac{M_v}{W_b} \leq \sigma_{zul}$$

1.5.4.5 Erforderlicher Wellendurchmesser

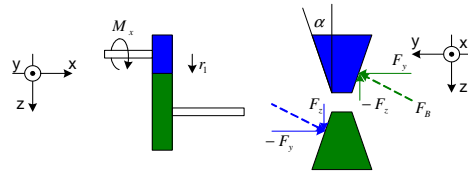
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_v}{\pi \cdot \sigma_{zul}}}$$

1.5.4.6 Berechnung der Zahnkräfte

$$F_y = \frac{M_x}{r_1}$$

$$F_z = -F_y \cdot \tan(\alpha)$$

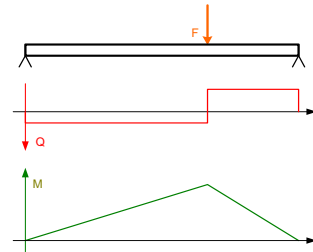
$$F_{Biegung} = \frac{F_y}{\cos(\alpha)} = \frac{M_x}{r_1 \cdot \cos(\alpha)}$$



1.6 Schub bei Querkraftbiegung

1.6.1 Querkraft – Moment – Abhängigkeit

$$Q = \frac{dM}{dx}$$



1.6.2 Schubspannung

1.6.2.1 Mittlere Schubspannung

$$\tau_m = \frac{Q}{A}$$

1.6.2.2 Örtliche Schubspannungen (Bisquitformel)

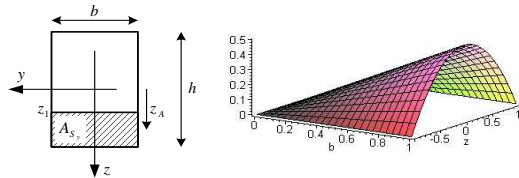
$$\tau(z) = \frac{Q \cdot S_y(z)}{b \cdot I_y}$$

1.6.3 Statisches Moment

$$S_y = \int z dA \left(= \int_z^{h/2} z dA \right)$$

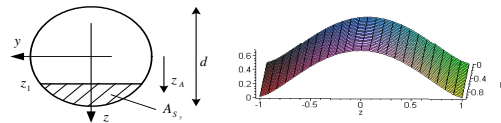
1.6.3.1 Beim Rechteckquerschnitt

$$S_y = \frac{b}{2} \left((h/2)^2 - z_1^2 \right) = A_{S_y} \cdot z_A$$



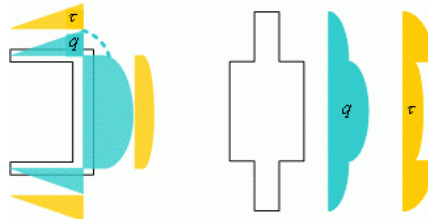
1.6.3.2 Beim Kreisquerschnitt

$$S_y = \frac{2}{3} \left(r^2 - z_1^2 \right)^{3/2} = A_{S_y} \cdot z_A$$



1.6.4 Schubfluss

$$q = \tau \cdot b = \frac{Q \cdot S_y}{I_y}$$

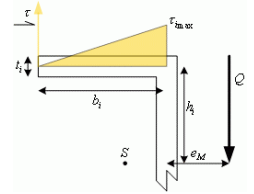


1.6.5 Schub in dünnwandigen Profilen

$$\tau(s) = \frac{Q \cdot S_y(s)}{t \cdot I_y}$$

1.6.5.1 Schubmittelpunkt

$$Q \cdot e_M = \sum_i \left[\frac{\tau_{i,max} \cdot b_i \cdot t_i \cdot h_i}{2} \right]$$



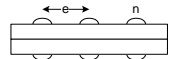
1.6.6 Schubbeanspruchung von Verbindungselementen

1.6.6.1 Geschweisst

$$a_{Schweisnaht} \geq \frac{Q \cdot S_{Gurr}}{2 \cdot I \cdot \tau_{Zul}}$$

1.6.6.2 Genietet

$$A_{Niet} \geq \frac{Q \cdot S_{Gurr} \cdot e}{I_y \cdot \tau_{Zul}}$$



1.7 Knickbeanspruchung

1.7.1 Eulerknicken

$$F_k = C \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_k^2}$$

$$L_k = \frac{L}{\sqrt{C}}$$

1.7.1.1 Spannung bei Knickkraft

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A}$$

1.7.1.1.1 Elastisches Knicken

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} \leq \sigma_{dP}$$

1.7.1.2 Minimales Trägheitsmoment

$$I_{\min} = \frac{v_k \cdot F \cdot L_k^2}{\pi^2 \cdot E}$$

1.7.1.2.1 Knicksicherheit

Stahl: 2..8

Grauguss: 3..6

Holz: 8..10

1.7.1.3 Schlankheitsgrad (geometrische Grösse)

$$\lambda = L_k \cdot \sqrt{\frac{A}{I_{\min}}} = \frac{L_k}{i_{\min}}$$

1.7.1.4 Eulerhyperbel

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \geq \sigma_{dP}$$

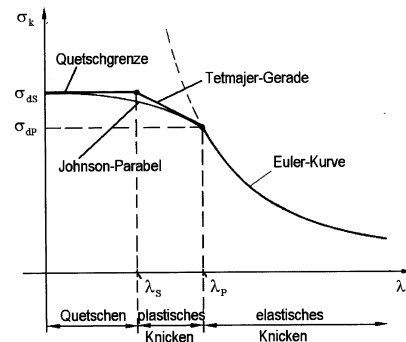
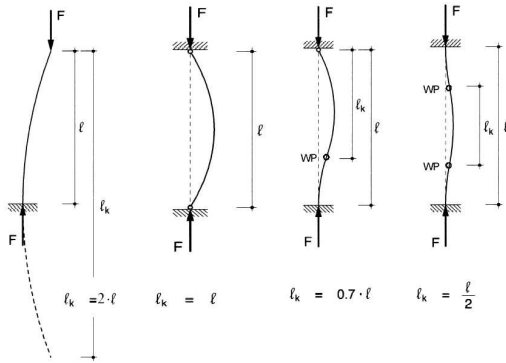
$$\lambda_{dP} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{dP}}}$$

1.7.2 Unelastische Knickung nach Tetmajer

$$\sigma_{k,T} = (a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2) \quad ; \lambda_s < \lambda < \lambda_{dP}$$

$$\sigma_{Euler} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad ; \lambda > \lambda_{dP}$$

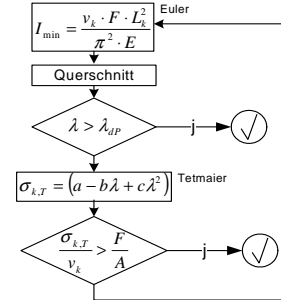
Werkstoff	λ_s	λ_p	a	b	c
St37	60	104	310	1.14	0
St50 & 60	0	88	335	0.62	0
St52	0	85	470	2.3	0
GG	0	80	776	12.00	0.053
Nadelholz	0	100	29.3	0.194	0
Al6061T6	9.5	66	139	0.868	0
Al2014-T6	12	55	212	1.585	0



1.7.2.1 Johnson-Parabel

$$\sigma_{k,T} = \sigma_{dS} - (\sigma_{dS} - \sigma_{dP}) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^2$$

1.7.3 Dimensionierung



Erstellt von:
Daniel Arnold, Altdorf, Uri, Schweiz
<http://www.lanny.ch>

Erstelldatum 04.01.1999 13:08

Letzte Änderung 16.12.2005 00:20